

DISCRETE WISKUNDE

DEEL I

DOOR

A. Hordijk en L.C.M. Kallenberg

DEEL I

I. GRAFEN

1. Definities en voorbeelden	1
2. Ketens en kringen	8
3. Euler grafen	13
4. Hamilton grafen	18
5. Bomen	22
6. Vlakke grafen en duale grafen	26

II. COMBINATORIEK

7. Permutaties, combinaties	39
8. Recurrente betrekkingen, voortbrengende functies	45
9. Het principe van inclusie en exclusie	64

III. ENUMERATIE

10. Het tellen van grafen; multinomiaalcoefficient	75
11. De stelling van Burnside	84
12. De theorie van Polya	90
13. Het tellen van niet-isomorfe grafen	104

DEEL II

IV. LINEAIRE PROGRAMMERING EN KORTSTE PADEN IN NETWERKEN

14. Lineaire programmering	107
15. De simplex methode	125
16. Kortste paden in netwerken	139

V. KOPPELINGEN

17. De huwelijksstelling van Hall	146
18. Transversalen	150
19. Toepassingen van de stelling van Hall	153

VI. MATROIDEN

20. Inleiding	157
21. Voorbeelden van matroiden	167
22. Grafen en matroiden	172
23. Het gretige algoritme	175

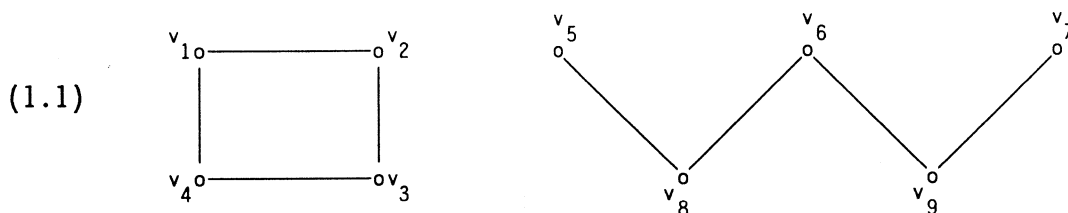
I. GRAFEN.

Literatuur:

- * Berge, C.: "Graphs and hypergraphs", North-Holland, 1973.
- * Busacker, R.G. and T.L. Saaty: "Finite graphs and networks: an introduction with applications", McGraw-Hill, 1965.
- * Liu, C.L.: "Introduction to combinatorial mathematics", McGraw-Hill, 1968.
- * Wilson, R.J.: "Introduction to graph theory", Oliver & Boyd, 1972.

1. Definities en voorbeelden.

Een (niet-gerichte) graaf G is een paar (V,E) met V is een niet-lege verzameling van elementen die knooppunten worden genoemd en E is een verzameling van tweetallen (niet-geordende paren) knooppunten (hetzelfde paar mag meerdere malen voorkomen); deze paren worden de takken genoemd.



Voor deze graaf is $V = \{v_1, v_2, \dots, v_9\}$ en $E = \{(v_1 \& v_2), (v_2 \& v_3), (v_3 \& v_4), (v_1 \& v_4), (v_5 \& v_8), (v_8 \& v_6), (v_6 \& v_9), (v_9 \& v_7)\}$.

We zeggen dat tak $e = (v \& w)$ incident is met de knooppunten v en w ; knooppunten v en w heten aangrenzend indien de graaf de tak $(v \& w)$ bevat. Als $e = (v \& w)$, dan heten v en w de eindpunten van de tak e . Een tak van het type $(v \& v)$ wordt een lus genoemd. Indien $(v \& w)$ meerdere malen voorkomt, dan spreken we van evenwijdige takken. Een graaf zonder lussen en evenwijdige takken heet normaal.

Een gerichte graaf D is een paar (V,A) . V is weer de verzameling van knooppunten. A is een verzameling van geordende paren van knooppunten; deze geordende paren worden de pijlen genoemd. De pijl $a = (v,w)$ is positief incident met v en negatief incident met w , v is het beginpunt en w het eindpunt van a .

Het aantal pijlen, dat positief incident is met v heet de positieve graad van v en wordt genoteerd met $\delta^+(v)$. De negatieve graad van v is analoog gedefiniëerd en wordt genoteerd met $\delta^-(v)$. De graad $\delta(v) = \delta^+(v) + \delta^-(v)$.

Tenzij anders is vermeld beschouwen we vanaf nu niet-gerichte grafen.

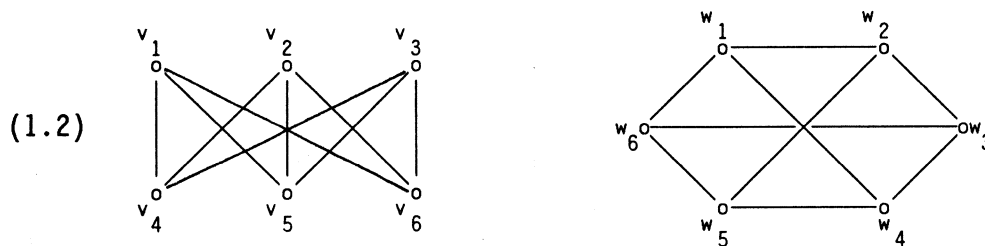
De graad van een knooppunt v is het aantal takken dat incident is met v . We noteren de graad van v met $\delta(v)$. Indien niet anders vermeld, zal de lus (v & v) voor 2 takken worden geteld in $\delta(v)$. Een geïsoleerd knooppunt is een knooppunt met de graad nul. Een knooppunt van de graad één noemen we een eindpunt van de graaf. De graaf van (1.1) heeft geen geïsoleerd knooppunt, maar wel eindpunten, nl. $\{v_5, v_7\}$.

Iedere tak telt tweemaal mee (nl. bij beide eindpunten) in de som van de graden over alle knooppunten. De som van de graden van alle knooppunten is dus even. Preciezer, de som is gelijk aan tweemaal het aantal takken.

In formule: $2m = \sum_{v \in V} \delta(v)$, waarbij m het aantal takken van de graaf is.

Een gevolg van dit lemma is dat het aantal knooppunten met oneven graad even is (bekijk bovenstaande formule modulo 2 en splits de som in de knooppunten van even graad en de knooppunten van oneven graad).

Twee grafen G_1 en G_2 heten isomorf indien er een 1-1-correspondentie tussen de knooppuntenverzameling van G_1 en G_2 bestaat met de eigenschap dat het aantal takken tussen ieder tweetal knooppunten van G_1 gelijk is aan het aantal takken tussen het corresponderende tweetal knooppunten van G_2 .



De twee grafen van figuur (1.2) zijn isomorf. Dit is te zien via de volgende correspondentie : $v_1 \leftrightarrow w_1$, $v_2 \leftrightarrow w_3$, $v_3 \leftrightarrow w_5$, $v_4 \leftrightarrow w_2$, $v_5 \leftrightarrow w_4$ en $v_6 \leftrightarrow w_6$.

Voor de graaf $G = (V, E)$ met $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ is de structuurmatrix $Q = (q_{ij})$ een $n \times n$ matrix met q_{ij} het aantal takken tussen de knooppunten v_i en v_j . Als voorbeeld geven we de structuurmatrices van de grafen van figuur (1.2)

(1.3)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Uit deze twee matrices zien we dat isomorfe grafen verschillende structuurmatrices kunnen hebben. Echter: ze zijn in elkaar over te voeren door verwisseling van rijen en corresponderende kolommen. Iedere structuurmatrix van een (niet-gerichte) graaf is symmetrisch: $q_{ij} = q_{ji}$, $\forall i, j$. Verder geldt:

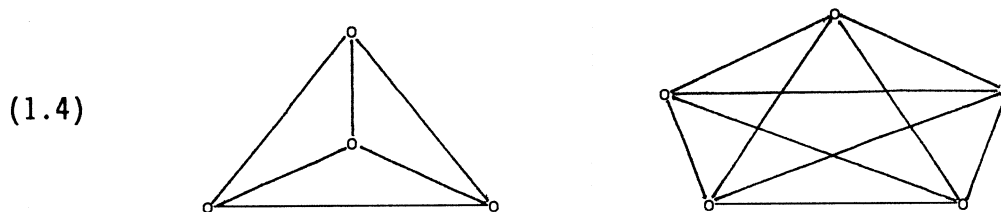
$$\sum_j q_{ij} = \sum_j q_{ji} = \text{de graad van knooppunt } v_i.$$

Bij een symmetrische matrix Q met elementen die niet-negatief en geheel zijn en met op de diagonaal even getallen, kunnen we een graaf construeren waarvan de structuurmatrix gelijk aan Q is. We kunnen dientengevolge opmerken dat grafentheorie gezien kan worden als de studie van een speciaal type matrices.

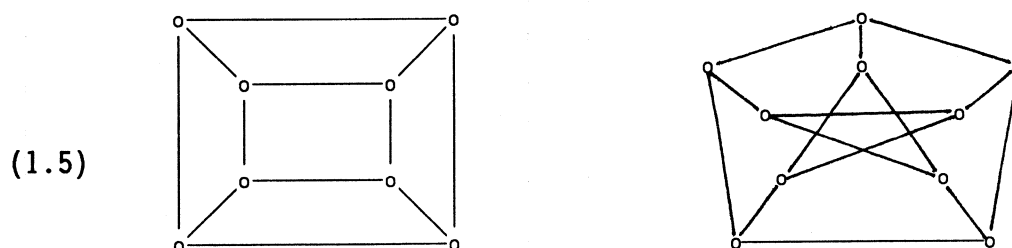
Een graaf waarvan de verzameling takken leeg is, wordt een nulgraaf of ook wel een totaal onafhankelijke graaf genoemd. We duiden de nulgraaf met n knooppunten aan met N_n .

Een normale graaf waarbij ieder tweetal verschillende knooppunten door een tak verbonden is noemen we een volledige graaf. Heeft de volledige graaf n knooppunten dan spreken we van een volledige n -graaf, notatie K_n .

In de figuur (1.4) zijn K_4 en K_5 getekend. De volledige n -graaf heeft precies $\frac{1}{2}n(n-1)$ takken.



Een normale graaf waarvan alle knooppunten dezelfde graad hebben heet regulier. Als alle knooppunten de graad r hebben, dan spreken we van een reguliere graaf van de graad r . De linkerfiguur in (1.4) is een reguliere graaf van de graad 3 met 4 knooppunten. De rechterfiguur in (1.2) is een reguliere graaf van de graad 3 met 6 knooppunten. Een reguliere graaf van de graad 3 met 8 knooppunten is de linkerfiguur in (1.5). De rechterfiguur van (1.5) is de Petersen graaf, ze is regulier van de graad 3 met 10 knooppunten.



Iedere nulgraaf is regulier van de graad 0 en de volledige graaf K_n is regulier van de graad $n-1$.

Indien de verzameling van knooppunten van graaf G in twee verzamelingen V_1 en V_2 kan opgedeeld worden z.d.d. iedere tak van G incident is met één knooppunt van V_1 en één knooppunt van V_2 dan wordt G een bipartiete graaf genoemd, soms aangeduid met $G(V_1, V_2)$ om de partitie verzamelingen V_1 en V_2 aan te duiden.

Een graaf is bipartiet d.e.s.d. als de knooppunten een kleuring met rood en blauw toelaten z.d.d. iedere tak zowel incident is met een rood als met een blauw knooppunt. Indien de bipartiete graaf geen evenwijdige takken heeft en alle takken (v_1, v_2) , $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ bevat, dan wordt ze een volledige bipartiete graaf genoemd.

$K_{p,q}$ is de notatie voor de volledige bipartiete graaf met p elementen in V_1 en q elementen in V_2 . In figuur (1.2) is $K_{3,3}$ getekend.

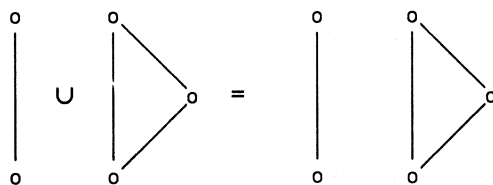
De graaf $K_{1,q}$ voor q een natuurlijk getal, wordt wel een stergraaf genoemd.

Een deelgraaf van graaf $G = (V, E)$ is een graaf $G^1 = (V^1, E^1)$ zdd. $V^1 \subseteq V$ en $E^1 \subseteq E$. G'' is een supergraaf van G als G een deelgraaf is van G'' .

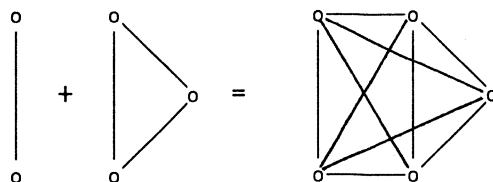
Uitgaande van de grafen $G_1 = (V_1, E_1)$ en $G_2 = (V_2, E_2)$ met $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ kunnen we op verschillende manieren een nieuwe graaf construeren. Twee hiervan zullen we geven.

De graaf $G_1 \cup G_2$ wordt gedefinieerd als de graaf met als knooppuntenverzameling $V_1 \cup V_2$ en met als takkenverzameling $E_1 \cup E_2$, dus $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

De graaf $G_1 + G_2$ vinden we door uit te gaan van $G_1 \cup G_2$ en alle takken toe te voegen die knooppunten van V_1 met knooppunten van V_2 verbinden.



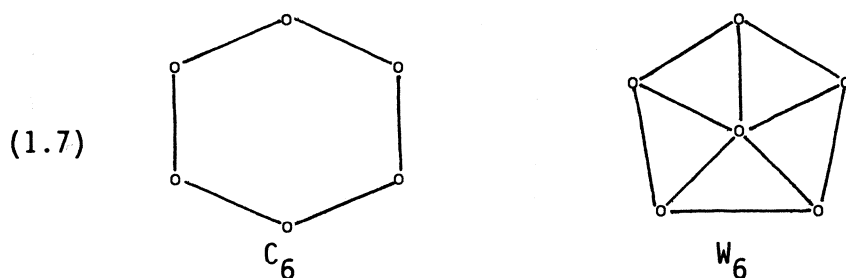
(1.6)



In figuur (1.6) zijn $K_2 \cup K_3$ en $K_2 + K_3$ getekend. Merk op dat $K_{p,q} = N_p + N_q$. De operaties \cup en $+$ zijn commutatief en associatief.

Indien G de vereniging is van grafen G_1 en G_2 dan is G onsamenhangend. Een graaf die niet onsamenvast is noemen we samenhangend. Iedere graaf G is de vereniging van samenhangende grafen en ieder van deze samenhangende deelgrafen wordt een component van G genoemd.

Een samenhangende graaf die regulier van de graad 2 is wordt een kringgraaf genoemd, de kringgraaf met n knooppunten duiden we aan met C_n . De som van N_1 en C_{n-1} ($n \geq 3$) wordt een wielgraaf op n knooppunten genoemd, notatie W_n . In figuur (1.7) zijn C_6 en W_6 getekend; W_4 is getekend in (1.4) links.



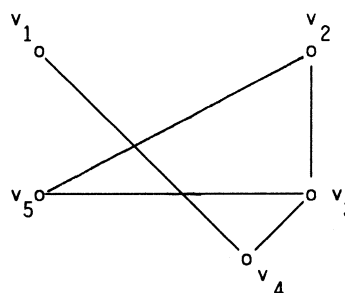
Zij $G = (V, E)$ een normale graaf. De complementaire graaf \bar{G} heeft als knooppuntenverzameling V , en twee knooppunten zijn aangrenzend in \bar{G} d.e.s.d indien ze niet aangrenzend zijn in G .

Indien de normale graaf G n knooppunten heeft, dan is G een deelgraaf van K_n . De complementaire \bar{G} verkrijgen we door in K_n de takken weg te laten die in G voorkomen. Merk op dat de complementaire graaf van een volledige graaf een nulgraaf is. De complementaire graaf van de complementaire graaf is de oorspronkelijke graaf. De complementaire graaf van een reguliere graaf is eveneens regulier.

Opgave 1.

Beschouw de hiernaast getekende graaf G .

- Bepaal van ieder knooppunt de graad.
- Bepaal de complementaire graaf \bar{G}
- Is G regulier? Is G bipartiet?
Is \bar{G} bipartiet?
- Bepaal de structuurmatrix van G .

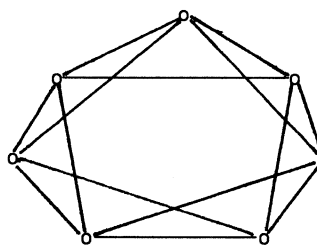


Opgave 2.

Bewijs dat in een normale graaf $2m \leq n^2 - n$.

Opgave 3

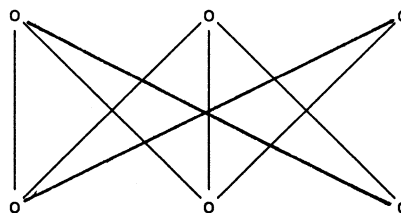
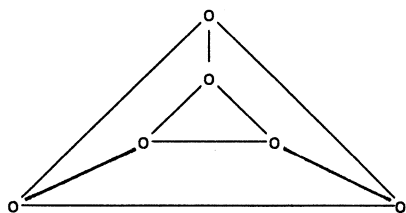
- a. Bepaal de structuurmatrix van de hiernaast getekende graaf.
- b. Teken de complementaire graaf.



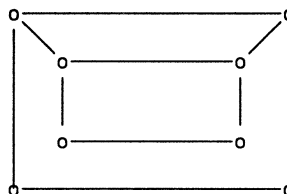
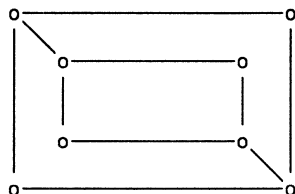
Opgave 4.

Ga voor ieder paar van de hieronder getekende grafen na of ze isomorf zijn.

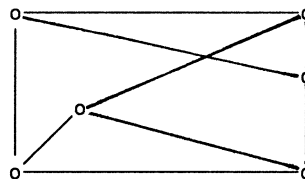
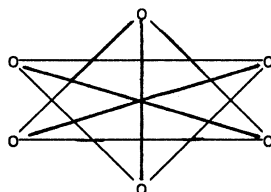
a.



b.

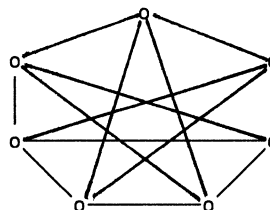


c.



Opgave 5.

Toon aan dat de hiernaast getekende graaf isomorf is met de graaf uit opgave 3.



Opgave 6.

Zij G een normale graaf die isomorf is met zijn complementaire graaf \bar{G} (zo'n graaf heet zelf-complementair).

- Bewijs dat het aantal knooppunten van \bar{G} òf een viervoud òf een viervoud + 1 is.
- Bepaal een zelf-complementaire graaf met 5 knooppunten.
- Bepaal alle zelf-complementaire grafen met 4 knooppunten.

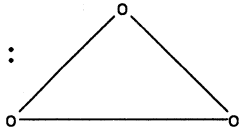
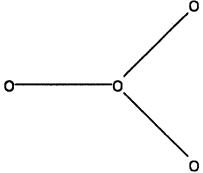
Opgave 7.

Bewijs dat in een normale, bipartiete graaf met n knooppunten en m takken geldt: $m \leq \frac{1}{4}n^2$.

Opgave 8.

Zij $G = (V, E)$ een normale graaf met $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, en $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. De lijngraaf $L(G) = (L(V), L(E))$ wordt gedefinieerd door

$$\begin{cases} L(V) = \{w_1, w_2, \dots, w_m\} \\ (w_i \ \& \ w_j) \in L(V) \text{ d.e.s.d. als } e_i \text{ en } e_j \text{ in } G \text{ aangrenzend zijn.} \end{cases}$$

- a. Teken de lijngrafen van G_1 :  en G_2 : 

- Bereken het aantal elementen van $L(E)$ in termen van de graden van de knooppunten van G .
- Bewijs dat de lijngraaf van de volledige graaf K_n regulier van de graad $2n-4$ is.

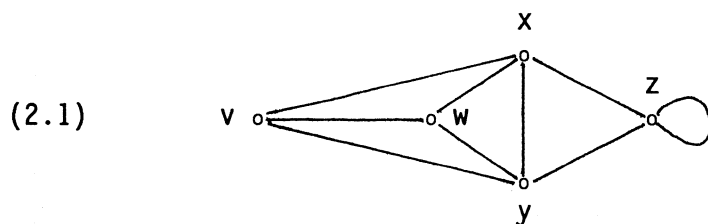
2. Ketens en kringen.

Een takkenreeks in graaf $G = (V, E)$ is een eindige rij van takken van de volgende vorm: $(v_0 \& v_1), (v_1 \& v_2), \dots, (v_{k-1} \& v_k)$.

Deze takkenreeks duiden we aan met $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k$.

Een takkenreeks heeft de eigenschap dat ieder tweetal op elkaar volgende takken tenminste één knooppunt gemeenschappelijk heeft. Deze eigenschap is echter niet voldoende voor een takkenreeks: een willekeurige verzameling takken uit een stergraaf vormt geen takkenreeks, maar wel hebben alle takken een knooppunt gemeenschappelijk.

Van de takkenreeks $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k$ noemen we v_0 het beginpunt en v_k het eindpunt; we spreken van een takkenreeks van v_0 naar v_k . De triviale takkenreeks van v_0 naar v_0 bevat geen takken. Het aantal takken heet de lengte van een takkenreeks. In de graaf (2.1.) is $v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow z \rightarrow y \rightarrow w$ een takkenreeks van v naar w met lengte zeven.



Een takkenreeks waarvan alle takken verschillend zijn heet een keten. Als bovendien de knooppunten v_0, v_1, \dots, v_{k-1} verschillend zijn, dan heet $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k$ een enkelvoudige keten. Indien $v_0 = v_k$ dan heet de takkenreeks gesloten. Een gesloten keten met tenminste één tak noemen we een kring. Een lus zowel als een paar evenwijdige takken vormen dus een kring. Is de kring een enkelvoudige keten, dan spreken we van een enkelvoudige kring.

In figuur (2.1) is, $v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow z \rightarrow x$ een keten, $v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z$ is een enkelvoudige keten, $v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x \rightarrow v$ is een kring en $v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow v$ is een enkelvoudige kring. Een enkelvoudige kring van de lengte drie heet een driehoek.

We geven nu een karakterisering van een samenhangende graaf. Meestal wordt deze karakterisering als definitie gebruikt. De graaf G is samenhangend indien er voor ieder paar knooppunten (v, w) een keten van v naar w bestaat. Voor een willekeurige graaf $G = (V, E)$ kunnen we een equivalentierelatie op V definiëren door: v en w zijn equivalent indien ze door een keten verbonden zijn. De equivalentieklassen zijn de componenten van G .

Indien G twee of meer componenten heeft dan is G onsamenvastend. Een samenvastende graaf met n knooppunten heeft tenminste $n-1$ takken (in te zien via inductie naar n). Het maximale aantal takken in een normale graaf met n knooppunten is $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Dus voor het aantal takken in een samenvastende graaf, zeg m , geldt:

$$n-1 \leq m \leq \frac{1}{2}n(n-1).$$

De volgende stelling geeft een generalisatie van dit resultaat.

2.2 STELLING.

Zij G een normale graaf met n knooppunten. Indien G k componenten heeft, dan geldt voor m het aantal takken van G ,

$$n - k \leq m \leq \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1).$$

BEWIJS:

We bewijzen de ongelijkheid $m \geq n-k$ met volledige inductie naar m , het aantal takken van G . Voor de nulgraaf geldt: $k = n$, dus is de ongelijkheid juist.

Stel G heeft $m \geq 1$ takken en de bewering geldt voor grafen met $m-1$ takken. Laten we één tak van G weg, dan wordt het aantal componenten, zeg k' , hoogstens één groter: $k' \leq k + 1$.

Uit de inductieveronderstelling volgt nu:

$$m - 1 \geq n - k' \geq n - k - 1, \text{ dus ook } m \geq n - k.$$

Merk op dat voor $k = 1$ de bovengrens juist is.

Om aan te tonen dat de bovengrens voor $k \geq 2$ juist is, nemen we aan dat alle componenten volledige grafen zijn. Veronderstel dat G_i en G_j twee componenten zijn met respectievelijk n_i en n_j knooppunten en $n_i \geq n_j \geq 2$. Indien we naast G_i en G_j de volledige grafen met resp. $n_i + 1$ en $n_j - 1$ knooppunten beschouwen, dan blijft het totale aantal knooppunten hetzelfde. Echter het totale aantal takken wordt groter: immers,

$$\frac{1}{2}\{(n_i+1)n_i - n_i(n_i-1)\} - \frac{1}{2}\{n_j(n_j-1) - (n_j-1)(n_j-2)\} = n_i - n_j + 1,$$

hetgeen positief is. Het maximale aantal takken bij k componenten krijgen we dus bij een graaf G met een component die een volledige graaf is met $n - k + 1$ knooppunten plus nog $(k-1)$ geïsoleerde knooppunten. Deze graaf heeft $\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$ takken. ■

2.3 GEVOLG. Iedere normale graaf met n knooppunten en meer dan $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ takken is samenvastend.

Een pijlenreeks in een gerichte graaf $D = (V, A)$ is een eindige rij pijlen van de vorm $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{k-1}, v_k)$.

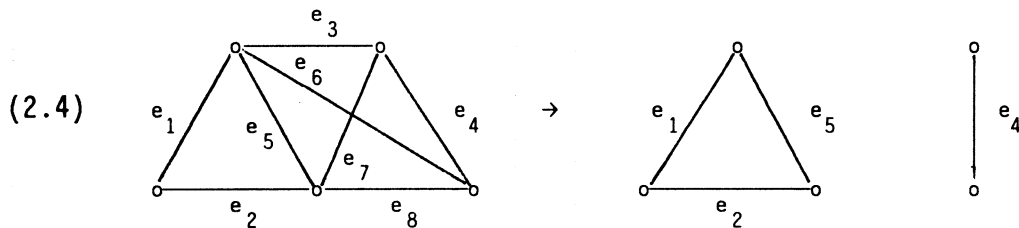
Een pijlenreeks waarin alle pijlen verschillend zijn heet een pad.

Als bovendien de knooppunten v_0, v_1, \dots, v_{k-1} verschillend zijn dan spreken we van een enkelvoudig pad. Indien $v_0 = v_k$, dan heet de pijlenreeks gesloten.

Een gesloten pad noemen we een ronde.

De graaf D is streng samenhangend als er voor ieder tweetal knooppunten v en w een pad is van v naar w en van w naar v . Deze eigenschap induceert weer een equivalentierelatie op V en daaruit volgt het begrip streng samenhangende component: een maximale deelgraaf die streng samenhangend is.

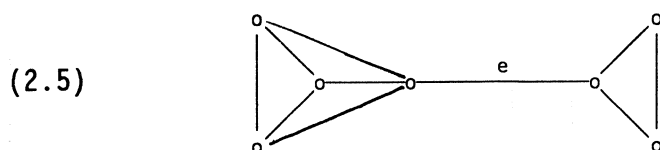
Een verzameling takken van een samenhangende graaf heet een splitsende verzameling als bij verwijdering van deze takken de graaf niet meer samenhangend is. In figuur (2.4) zijn de verzamelingen $\{e_1, e_2, e_5\}$ en $\{e_3, e_6, e_7, e_8\}$ beide splitsende verzamelingen.



De onsamenhangende graaf die overblijft na weglating van de tweede splitsende verzameling is rechts getekend.

Bij twee niet-lege deelverzamelingen, zeg V_1 en V_2 , die een partitie vormen van knooppuntenverzameling V , heet de verzameling van alle takken tussen V_1 en V_2 een snede. Een minimale snede is een snede welke geen andere snede als echte deelverzameling bevat. In figuur (2.4) is $\{e_1, e_2, e_4, e_6, e_8\}$ een snede, $\{e_1, e_2\}$ en $\{e_4, e_6, e_8\}$ zijn minimale sneden.

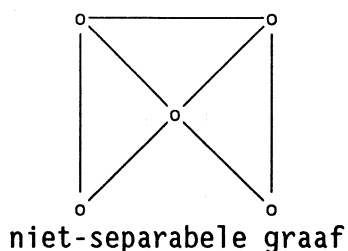
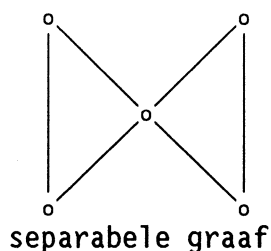
De verwijdering van de takken uit een minimale snede van een samenhangende graaf, geeft een graaf met precies twee componenten. Indien een minimale snede bestaat uit precies één tak e , dan noemen we deze tak e een brug (zie figuur 2.5).



Deze definities kunnen zonder moeite uitgebreid worden tot grafen die onsamenvastend zijn. Een splitsende verzameling is dan een verzameling van takken waarvoor bij verwijdering het aantal componenten toeneemt. Bij de definitie van een snede voegen we toe de eis dat de verzameling takken niet-leeg moet zijn.

Een minimale snede is weer een splitsende verzameling die geen splitsende verzameling als echte deelverzameling bevat. De verwijdering van de takken van een minimale snede doet het aantal componenten van de graaf met precies één toenemen.

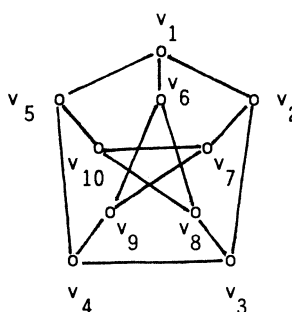
Als de verwijdering van een knooppunt v (met de daarmee incidentie takken) een samenhangende graaf onsamenvastend maakt, dan heet v een scheidingspunt van de graaf. Een samenhangende graaf heet separabel als er minstens één scheidingspunt is.



Opgave 1.

Bepaal voor de hiernaast getekende graaf:

- Een takkenreeks van de lengte 4.
- Een enkelvoudige kring van de lengte 6.
- Een enkelvoudige kring van de lengte 9.
- Een snede bestaande uit 5 takken.



Opgave 2.

Zij G een samenhangende graaf en laat $e \in E$.

Bewijs dat e deel uitmaakt van een kring dan en slechts dan als $G - \{e\}$ samenhangend is.

Opgave 3.

Zij $G = (V, E)$ een normale graaf welke regulier is van de graad 3.

Laat d de grootste gemene deler zijn van het aantal takken in de enkelvoudige kringen. Bewijs dat $d \leq 2$.

Aanwijzing: Beschouw de langste enkelvoudige keten, zeg $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k$. Ga na welke enkelvoudige kringen de andere met v_1 incidente takken genereren, en beschouw de lengten van deze kringen.

Opgave 4.

Een elektronisch circuit wordt gebouwd om rijtjes 0'en en 1'en van de vorm 010^*10 te herkennen (0^* staat voor een zeker aantal (eventueel nul) 0'en).

Voorbeelden van goede rijtjes zijn 0110, 01010, 010010 en 0100000010.

Construeer een gerichte graaf $D = (V, A)$ met vier knooppunten zódanig dat iedere pijlenreeks van v_0 naar v_* die minstens één ander knooppunt van V bevat en v_0 en v_* hoogstens twee keer bezoekt, correspondeert met een rijtje van de vorm 010^*10 .

Opgave 5.

Zij $G = (V, E)$ een samenhangende graaf zódanig dat voor iedere $e \in E$ $G - \{e\}$ onsamenvast is. Bepaal het aantal takken van G .

Opgave 6.

Zij $G = (V, E)$ een normale graaf met een even aantal knooppunten en zonder driehoeken.

Bewijs dat G hoogstens $\frac{1}{4}n^2$ takken heeft en geef voor een willekeurige even waarde van n een voorbeeld waarin deze grens wordt aangenomen.

Opgave 7.

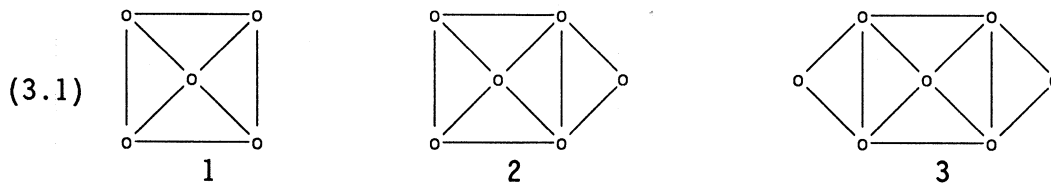
a. De takken van de K_6 worden rood of blauw gekleurd.

Toon aan dat voor een willekeurige kleuring er altijd een driehoek is waarvan de takken dezelfde kleur hebben.

b. Toon aan dat er in iedere groep van 6 personen er altijd 3 zijn die òf elkaar geen van allen kennen òf elkaar alle 3 kennen.

3. Euler grafen.

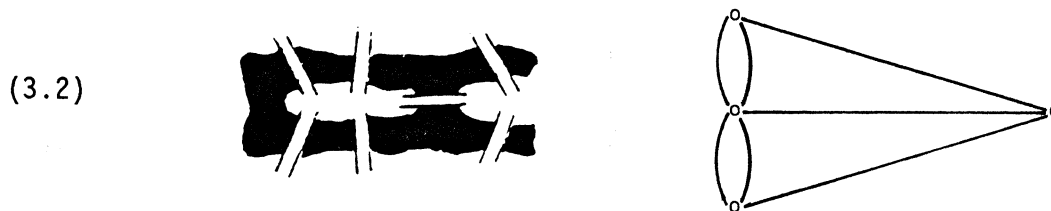
Indien voor een samenhangende graaf G geldt dat er een kring bestaat die alle takken van G bevat, dan noemt men G een Euler graaf. De kring wordt een Euler kring genoemd. In een Euler kring wordt iedere tak precies éénmaal doorlopen. Een Euler keten is een keten die alle takken bevat. Heeft graaf G een Euler keten, dan noemen we G een semi-Euler graaf.



De grafen (3.1.1), (3.1.2) en (3.1.3) zijn resp. niet-Euler, semi-Euler en Euler.

Algemeen wordt aangenomen dat de grafentheorie zijn oorsprong heeft in 1736 toen Euler een beroemd probleem nl. het Königsbergen bruggen probleem, oploste.

De oevers van de Pregel rivier en twee eilanden in de rivier zijn met zeven bruggen verbonden. Men vroeg zich af, of het mogelijk is om op één der oevers een wandeling te beginnen die gaat over alle bruggen (precies eenmaal) en op de beginplaats terugkeert. Ofwel: bestaat er een Euler kring?



3.3 LEMMA.

Indien voor ieder knooppunt van de graaf G de graad tenminste 2 is, dan bevat G een kring.

BEWIJS:

De bewering is triviaal indien G een lus of een paar evenwijdige takken bevat. Laten we daarom aannemen dat G normaal is. Zij v een willekeurig knooppunt, we kunnen nu een takkenreeks $v \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \dots$ kiezen z.d.d. $v_{i+1} \neq v_i$. Daar G eindig veel knooppunten heeft moeten we na een eindig aantal keuzen een v_i kiezen die reeds eerder voorgekomen is. De takkenreeks van v_i naar v_i is een kring. ■

3.4. STELLING.

Een samenhangende graaf is een Euler graaf d.e.s.d. als de graad van ieder knooppunt even is.

BEWIJS:

→ Zij C een Euler kring van G . Indien C een knooppunt passeert dan geeft dat een bijdrage van 2 voor de graad van dat knooppunt. Daar iedere tak in C voorkomt, moet dus de graad van ieder knooppunt even zijn.

← Dit bewijs gaat met volledige inductie naar het aantal takken van G . Daar G samenhangend is, heeft ieder knooppunt een graad ≥ 2 .

Volgens lemma 3.3 bevat G een kring C . Indien C alle takken van G bevat, dan is C een Euler kring, waarvan het bestaan aangetoond moet worden.

Indien C niet alle takken bevat, dan laten we de takken van C weg. De overblijvende graaf, zeg H , bevat minder takken dan G . De graad van ieder knooppunt van H is weer even. Graaf H hoeft niet meer samenhangend te zijn. Echter de componenten van H zijn samenhangend. Volgens de inductieaanname bevat iedere component een Euler kring. Iedere component van H heeft tenminste één knooppunt met C gemeen. We krijgen een Euler kring door de takken van C te volgen totdat een knooppunt van H wordt bereikt. We doorlopen nu de Euler kring in de component van H waartoe dit knooppunt behoort. Daarna vervolgen we C weer totdat een knooppunt van H wordt bereikt, etc. De Euler kring is getekend zodra we bij het beginpunt terugkeren. ■

3.5 GEVOLG: Een samenhangende graaf is een Euler graaf d.e.s.d. als de verzameling takken in disjuncte kringen verdeeld kan worden.

3.6 GEVOLG: Een samenhangende graaf is een semi-Euler graaf indien er hoogstens twee knooppunten zijn met oneven graad.

BEWIJS: Voeg tussen de knooppunten van oneven graad een tak toe en pas stelling 3.4 toe.

Het bewijs van stelling 3.4 geeft tevens een algorithme om een Euler kring te vinden. Dit algorithme kan als volgt worden beschreven:

initialisatie: Kies v willekeurig; $C := \{v\}$.

iteratie: while $E \neq \emptyset$ do

begin kies $x \in C$ met $\delta(x) > 0$;

roep de procedure $\text{cycle}(D, x)$ aan (deze bepaalt een niet verder te verlengen kring D vanuit x);

vervang in C x door D

end

procedure cycle (D,x)

initialisatie: $z := x$; $D := \{x\}$;

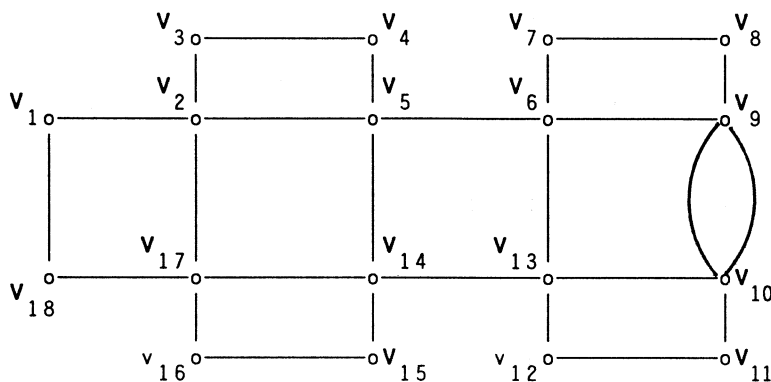
iteratie: while $\delta(z) \neq 0$ do

begin kies w zdd. $(z&w) \in E$; $D := D \cup \{w\}$; $E := E - (z&w)$;

$\delta(z) := \delta(z)-1$; $\delta(w) := \delta(w)-1$; $z := w$

end

3.7 Voorbeeld: Beschouw de hieronder getekende graaf.



Initialisatie: $v = v_1$; $C = \{v_1\}$.

Iteratie 1: $x = v_1$; $D = \{v_1, v_2, \dots, v_6, \dots, v_{18}, v_1\}$;

$C = \{v_1, v_2, \dots, v_6, \dots, v_{18}, v_1\}$.

Iteratie 2: $x = v_2$; $D = \{v_2, v_5, v_{14}, v_{17}, v_2\}$;

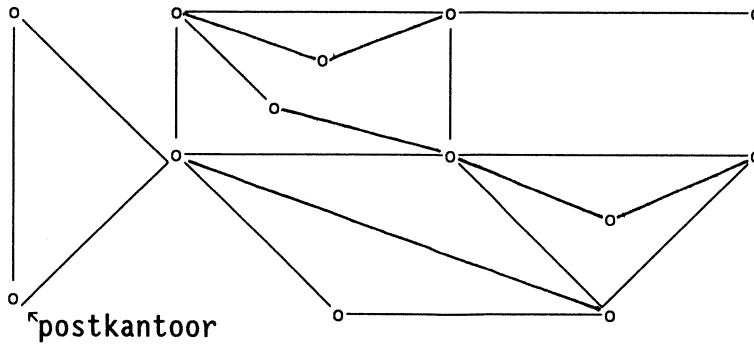
$C = \{v_1, v_2, v_5, v_{14}, v_{17}, v_2, \dots, v_6, \dots, v_{18}, v_1\}$.

Iteratie 3: $x = v_6$; $D = \{v_6, v_9, v_{10}, v_{13}, v_6\}$;

$C = \{v_1, v_2, v_5, v_{14}, v_{17}, v_2, \dots, v_6, v_9, v_{10}, v_{13}, v_6, \dots, v_{18}, v_1\}$

Opgave 1.

Een postbode vertrekt op het postkantoor, moet de hieronder als takken van een graaf getekende straten doorlopen en daarna weer terugkeren op het postkantoor. Geef een route die zodanig is dat iedere straat precies één keer wordt doorlopen.



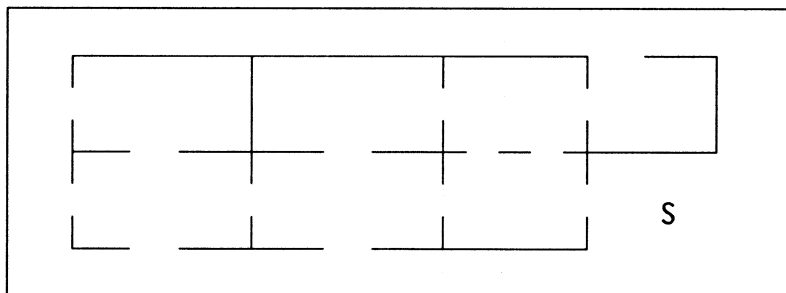
Opgave 2.

Zij G een samenhangende 4-reguliere graaf.

Bewijs dat de takken van G met twee kleuren gekleurd kunnen worden z.d.d. ieder knooppunt incident is met twee takken van elke kleur.

Opgave 3.

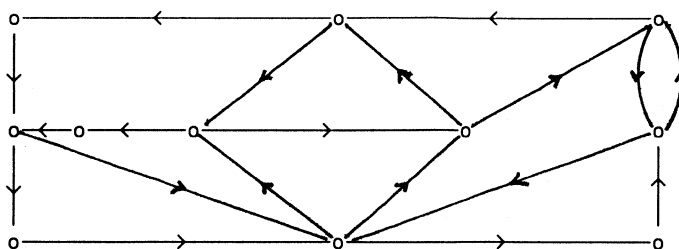
Beschouw de hieronder getekende plattegrond van een tentoonstellingsruimte. Is het mogelijk om door de zeven zalen en de daaromheen liggende gang een wandeling te maken waarbij iedere doorgang precies één keer wordt gepasseerd? De wandeling moet starten en eindigen bij S .



Opgave 4.

Beschouw een streng samenhangende graaf $D = (V,A)$. D is een Euler graaf als alle pijlen een ronde vormen.

- Bewijs dat D een Euler graaf is dan en slechts dan als $\delta^+(v) = \delta^-(v)$ voor alle $v \in V$.
- Bepaal een Euler-ronde in onderstaande graaf.



Opgave 5.

Zij $V = \{000, 001, 010, \dots, 111\}$.

Laat $(a_1 a_2 a_3, b_1 b_2 b_3) \in A$ dan en slechts dan als $a_2 = b_1$ en $a_3 = b_2$ (de a 's en b 's zijn nullen of énen).

- a. Teken de graaf $D = (V, A)$.
- b. Ga na of D een Euler graaf is.
- c. Rangschik acht nullen en acht énen als een cyclische rij $a_1 a_2 \dots a_{16}$ zodanig dat $\{ a_i a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3} \mid i=1, 2, \dots, 16 \}$ de binaire getallen van 4 cijfers vormen.

Opgave 6.

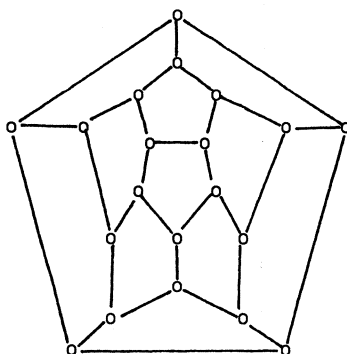
Vind een cyclische rangschikking van 9 a 's, 9 b 's en 9 c 's, zodat elk van de 27 woorden van lengte 3 uit het alfabet $\{a, b, c\}$ precies éénmaal voorkomt, als we telkens drie opeenvolgende letters nemen.

4. Hamilton grafen

Een spel in 1859 bedacht door Sir William Hamilton wordt gespeeld op een regelmatig twaalfvlak waarvan de 20 hoekpunten de namen dragen van 20 bekende steden (Amsterdam, Ann Arbor, Berlijn, Boedapest, Dublin, Edinburgh, Jerusalem, Londen, Melbourne, Moskou, Novosibirsk, New York, Parijs, Peking, Praag, Rio de Janeiro, Rome, San Fransisco, Tokio en Warschau).

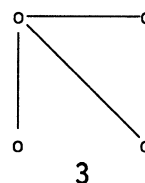
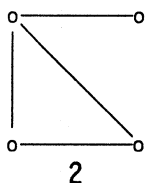
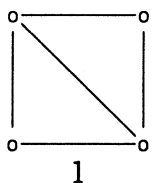
De speler moet over de ribben van het twaalfvlak een "reis om de wereld" zien te maken z.d.d. iedere stad precies eenmaal wordt bezocht en de reis eindigt op het vertrekpunt.

(4.1)



Een enkelvoudige kring die alle knooppunten bevat heet een Hamilton kring; een graaf G die een Hamilton kring bevat heet een Hamilton graaf; een enkelvoudige keten die alle knooppunten bevat heet een Hamilton keten en een graaf G die een Hamilton keten bevat heet een semi-Hamilton graaf.

(4.2)



De grafen (4.2.1), (4.2.2) en (4.2.3) zijn resp. Hamilton, semi-Hamilton en niet semi-Hamilton.

In paragraaf 3 gaven we een eenvoudige karakterisering voor Euler grafen. Het vinden van zo'n karakterisering voor Hamilton grafen is een van de beroemde onopgeloste problemen in de grafentheorie. De volgende stelling geeft een voldoende voorwaarde.

4.3. STELLING (Dirac 1952).

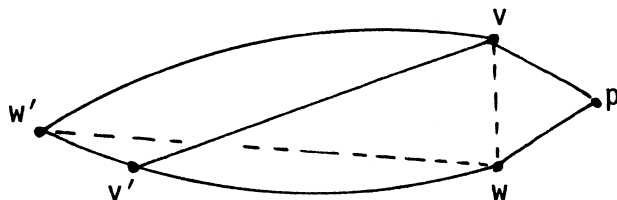
Indien G een normale graaf is met minstens 3 knooppunten en $\delta(v) \geq \frac{1}{2}n$ voor ieder knooppunt v , dan is G een Hamilton graaf.

BEWIJS:

We voeren extra knooppunten in die verbonden worden met alle knooppunten van G . Zeg k is het kleinste aantal knooppunten dat nodig is om de graaf G tot een Hamilton graaf, zeg G' , te maken.

Merk op dat $k \leq n$, omdat de kring $(v_1, x_1, v_2, x_2, \dots, v_n, x_n, v_1)$ met x_i de toegevoegde knooppunten voldoet. We zullen aantonen dat $k = 0$, waaruit volgt dat G een Hamilton graaf is.

Zij $v \rightarrow p \rightarrow w \rightarrow \dots \rightarrow v$ een Hamilton kring voor G' , met v en w knooppunten van G en p is een van de toegevoegde knooppunten. De knooppunten v en w zijn niet aangrenzend, want indien ze aangrenzend waren geweest, dan hadden we het extra knooppunt p weg kunnen laten en was het aantal knooppunten van G' niet minimaal geweest. Wat ook niet mag voorkomen in de Hamilton kring is, dat een met v aangrenzend knooppunt, ongelijk p (zeg v') onmiddellijk volgt op een met w aangrenzend knooppunt (zeg w'). Want dan zouden we de kring $v \rightarrow p \rightarrow w \dots \rightarrow v' \rightarrow w' \rightarrow \dots \rightarrow v$ kunnen vervangen door $v \rightarrow v' \rightarrow \dots \rightarrow w \rightarrow w' \rightarrow \dots \rightarrow v$, waarbij $v' \rightarrow \dots \rightarrow w$ de takkenreeks $w \rightarrow \dots \rightarrow v'$ in omgekeerde volgorde is.



Dus voor ieder knooppunt v' zdd. $(v \& v')$ een tak is in G' , vinden we een opvolger in de Hamilton kring, zeg w' met $(w \& w')$ is geen tak in G' .

Hieruit volgt:

$$\delta(w) + k = \delta'(w) \leq (n+k-1) - [\delta'(v)-1] = (n+k-1) - \delta(v) - k + 1 = n - \delta(v),$$

d.w.z. er geldt:

$$n \leq \delta(w) + \delta(v) \leq n - k,$$

waarmee is aangetoond dat $k = 0$. ■

4.4 Paardesprong probleem.

Hoe kan over een schaakbord een paard een serie sprongen maken z.d.d. hij alle velden precies éénmaal bezoekt?

Dit probleem is gelijk aan het vinden van een Hamilton keten in een graaf met 64 knooppunten waarvan de knooppunten aangrenzend zijn als de corresponderende velden van het schaakbord via een paardesprong verbindbaar zijn.

4.5 Handelsreizigersprobleem.

Een handelsreiziger moet een aantal steden bezoeken. Gegeven is een afstandstabel tussen de steden. Het probleem is het vinden van de route met minimale lengte onder de routes die alle steden passeren. In grafentaal is dit probleem, het vinden van een Hamilton kring met minimale lengte.

Opgave 1.

Geef een voorbeeld van een normale, samenhangende graaf die Euler is en niet-Hamilton, en een voorbeeld van een niet-Euler graaf die Hamilton is.

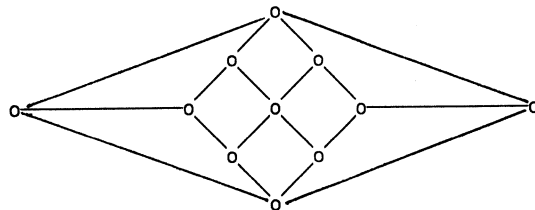
Opgave 2.

- Hoeveel verschillende Hamilton kringen zijn er in de K_n ?
- Hoeveel verschillende Hamilton kringen zijn er in de $K_{n,m}$?

Opgave 3.

Zij $G = (V,E)$ een niet-gerichte graaf met $\delta(v) \geq 2$ voor alle $v \in V$. Laat $W \subseteq V$ zódat geen enkel tweetal knooppunten van W door een tak verbonden is.

- Zij C een Hamilton kring in G , dan zijn er minstens $\sum_{w \in W} \delta(w) - 2 \cdot |W|$ takken die niet tot C behoren. Bewijs dit.
- Toon aan dat als $m + 2 \cdot |W| < \sum_{w \in W} \delta(w) + n$ de graaf G geen Hamilton kring heeft.
- Ga na of onderstaande graaf een Hamilton graaf is.



Opgave 4.

- Bewijs dat de lijngraaf van een normale Euler graaf zowel een Euler graaf als een Hamilton graaf is.
- Bewijs dat de lijngraaf van een normale Hamilton graaf weer een Hamilton graaf is maar in het algemeen geen Euler graaf.

Opgave 5.

Toon aan dat de Petersen-graaf geen Hamilton graaf is.

Opgave 6.

Beschouw de 2^n binaire getallen van n bits (0 of 1).

De vraag luidt: Kunnen deze getallen zo in een cyclische rij worden opgeschreven dat opeenvolgende getallen slechts op één plaats verschillen (dit heet een Gray code). Voor $n = 2$ is een oplossing: 00,01,11,10,00.

- Formuleer dit probleem als het probleem om een Hamilton kring in een graaf te bepalen.
- Los het probleem op voor $n = 3$ en $n = 4$.
- Geef aan hoe de oplossing voor n uit die van $n-1$ bepaald kan worden.

Opgave 7.

- Ga na dat het volgende probleem neerkomt op het zoeken naar een Hamilton kring:

Gegeven is een groep van n mensen; van elk tweetal mensen is bekend of ze elkaar wel of niet kennen. Probeer deze mensen zodanig aan een ronde tafel te plaatsen, dat iedereen twee bekenden als burens heeft.

- Toon aan dat voor oneven waarden van n de K_n $\frac{1}{2}(n-1)$ disjuncte Hamilton kringen heeft.
- Veronderstel dat de in a. genoemde groep uit 11 personen bestaat die elkaar allemaal kennen. Hoe vaak kunnen ze dan aan een ronde tafel plaats nemen zódanig dat iedere persoon steeds andere burens heeft.

Opgave 8.

n Spelers doen mee aan een tennistoernooi, waarin iedereen speelt tegen alle andere $n-1$ spelers.

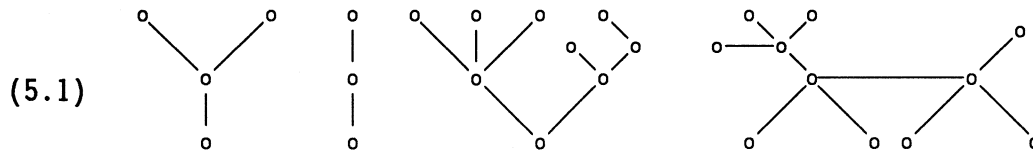
Toon aan dat aan het eind van het toernooi een rangorde van spelers kan worden gemaakt zódanig dat iedere speler heeft gewonnen van de speler die direct onder hem staat.

Opgave 9.

- Als in een normale graaf voor ieder tweetal niet-aangrenzende knooppunten v en w geldt dat $\delta(v) + \delta(w) \geq n$ ($n \geq 3$), dan is de graaf Hamilton. Bewijs dit.
- Bewijs dat een normale graaf een kring van Hamilton heeft als het aantal takken minstens $\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 6)$ is.
- Zij $G = (V, E)$ een normale, samenhangende graaf met voor ieder tweetal niet-aangrenzende $v, w \in V$ $\delta(v) + \delta(w) \geq n-1$. Toon aan dat G een semi-Hamilton graaf is.

5. Bomen

Een graaf die geen kringen bevat heet een bos. Indien de graaf ook nog samenhangend is, dan heet de graaf een boom. De componenten van een bos zijn bomen.



De graaf (5.1) is een bos bestaande uit vier bomen.

5.2 STELLING

Zij T een normale graaf met n knooppunten. De volgende beweringen zijn equivalent:

- (i) T is een boom;
- (ii) T heeft geen kringen en heeft $(n-1)$ takken;
- (iii) T is samenhangend en heeft $(n-1)$ takken;
- (iv) T is samenhangend en iedere tak is een brug.;
- (v) Ieder paar knooppunten van T is door precies één keten verbonden;
- (vi) T heeft geen kringen, maar door toevoeging van een tak ontstaat precies één kring.

BEWIJS:

Indien $n = 1$ dan worden alle zes de beweringen triviaal. We nemen daarom aan dat $n \geq 2$.

$i \rightarrow ii$: Uit de definitie van boom volgt dat T geen kringen heeft. Door één tak weg te laten ontstaan twee componenten die bomen zijn. Dat T $(n-1)$ takken heeft bewijzen we met volledige inductie. Volgens de inductie aanname hebben de twee componenten één tak minder dan het aantal knooppunten. Het totale aantal takken in de twee componenten is dus $n-2$, de weggelaten tak erbij maakt $n-1$ takken.

$ii \rightarrow iii$: Indien T niet-samenhangend is dan beschouwen we de componenten van T . Deze zijn samenhangend en hebben volgens (ii) geen kringen, ze zijn dus bomen en hebben daarom één tak minder dan het aantal knooppunten. Bij k componenten is het aantal takken dus $n-k$. Daar er $n-1$ takken zijn, volgt nu dat $k = 1$, dus T is samenhangend.

$iii \rightarrow iv$: Indien een tak verwijderd wordt dan is het aantal takken $n-2$. Volgens stelling 2.2 geldt dan dat $k \geq 2$. Iedere tak is dus een snede, oftewel een brug.

$iv \rightarrow v$: Daar T samenhangend is, geldt dat ieder paar knooppunten door tenminste één keten verbonden is. Indien een zeker paar knooppunten door twee ketens verbonden is, dan kunnen we zonder de samenhang te verstoren van een van de ketens een tak weglaten. Deze tak is dan geen brug: tegenspraak.

$v \rightarrow vi$: Indien T een kring heeft, dan zal ieder tweetal knooppunten in de kring door tenminste twee ketens verbonden zijn. Indien een tak $e = (v \& w)$ wordt toegevoegd aan T dan ontstaat een kring, immers v en w waren al verbonden door een keten. Indien er twee kringen ontstaan, dan moeten beide de tak $(v \& w)$ bevatten. Ga na dat er dan ook een kring is die e niet bevat. Oftewel T heeft een kring, in tegenspraak met (v) .

$vi \rightarrow i$: Veronderstel dat T niet samenhangend is. Indien we een tak toevoegen die een knooppunt van een component verbindt met een knooppunt van een andere component, dan ontstaat geen kring. Dit is in tegenspraak met (vi) . ■

5.3 GEVOLG. Zij G een bos met n knooppunten en k componenten, dan heeft G $n-k$ takken.

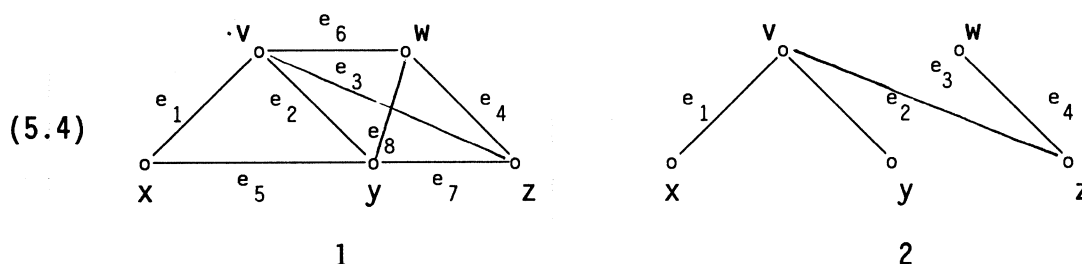
BEWIJS:

Pas bewering (ii) van stelling 5.2 toe op ieder van de componenten. ■

Een boom met $n \geq 2$ knooppunten heeft minstens 2 eindpunten, immers de som van de graden van alle knooppunten is $2(n-1)$. Er moeten dus minstens 2 knooppunten van de graad 1 zijn.

Zij G een samenhangende graaf. Indien G een kring heeft dan verwijderen we een van de takken van deze kring. De graaf blijft samenhangend. Indien de nieuwe graaf een kring bevat, dan verwijderen we een van de takken van de kring, etc. Door een aantal malen dit procédé te herhalen vinden we een graaf die geen kringen bevat en alle knooppunten van G met elkaar verbindt. Deze boom noemen we een voortbrengende boom.

Algemeen: als G k componenten heeft, dan kunnen we het procédé toepassen op ieder van de componenten en vinden dan een voortbrengend bos. Indien G n knooppunten en m takken heeft, dan moeten precies $m-(n-k)$ takken verwijderd worden. Voor graaf G noemen we $v(G) := m - n + k$ het kringgetal.



De boom in figuur (5.4.2) is een voortbrengende boom voor graaf (5.4.1). Het kringgetal van graaf (5.4.1) is vier.

Het aantal takken in een voortbrengend bos noemen we het snegetal. Voor graaf G met n knooppunten en k componenten is het snegetal gelijk aan $n-k$.

5.5 STELLING

Zij $T = (V, E_1)$ een voortbrengende boom voor de normale graaf $G = (V, E)$.

Er geldt:

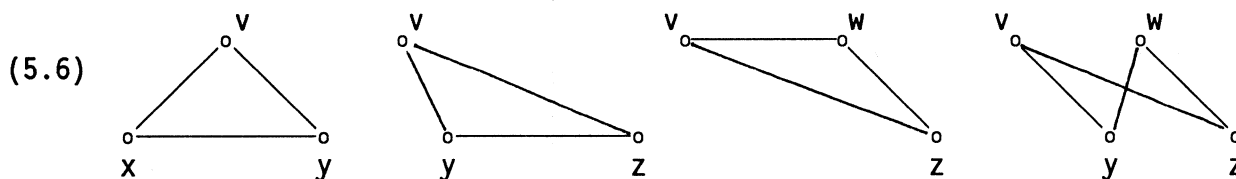
- (i) ieder snede van G heeft minstens één tak gemeen met E ;
- (ii) iedere kring van G heeft minstens één tak gemeen met $E-E_1$.

BEWIJS:

(i): Zij C^* een snede van G . Zeg V_1 en V_2 zijn de bij C^* behorende partitieverzamelingen van V . Voor $v_1 \in V_1$ en $v_2 \in V_2$ moet er een keten zijn in T die v_1 met v_2 verbindt. Dus is er ook minstens één tak in T die een knooppunt van V_1 met een knooppunt van V_2 verbindt. Deze tak behoort tot C^* .

(ii): Veronderstel dat kring C geen tak gemeen heeft met het complement van T . Dan volgt daaruit dat C in T is bevat. T bevat echter geen kringen: tegenspraak. ■

Voor graaf G met voortbrengende boom T geldt volgens stelling 5.2, dat bij toevoeging aan T van een tak van G precies één kring ontstaat. De verzameling kringen die op deze wijze te maken zijn, wordt de kringbasis geassocieerd met T genoemd. Er zijn $\nu(G)$ takken in het complement van T , dus het aantal kringen in een kringbasis is gelijk aan het kringgetal. Iedere kringbasis heeft dus evenveel kringen. Alle kringen in de kringbasis zijn verschillend.



In figuur (5.6) is de kringbasis voor de graaf (5.4.1) getekend, die geassocieerd is met de voortbrengende boom (5.4.2).

Volgens bewering (iv) van stelling 5.2 geeft de verwijdering van een tak uit T een deelgraaf die alle knooppunten bevat en uit twee onderling niet-samenhangende grafen bestaat, zeg met knooppuntenverzamelingen V_1 en V_2 .

Alle takken tussen knooppunten van V_1 en V_2 vormen een snede. Aan iedere tak van T kunnen we dus toevoegen een snede. De verzameling van deze sneden noemen we de snedebasis geassocieerd met T . De sneden in een snedebasis zijn onderling verschillend. Het aantal sneden in een snedebasis is gelijk aan het snedegetal. De snedebasis van de graaf (5.4.1) die geassocieerd is met de voortbrengende boom (5.4.2) is $\{e_1, e_5\}$, $\{e_2, e_5, e_7, e_8\}$, $\{e_3, e_6, e_7, e_8\}$ en $\{e_4, e_6, e_8\}$.

Opgave 1.

Bewijs dat iedere boom een bipartiete graaf is.

Opgave 2.

- Bepaal voor de volledige graaf K_5 het kringgetal en het snedegetal.
- Kies in de K_5 een voortbrengende boom en bepaal de daarmee geassocieerde kringbasis en snedebasis.

Opgave 3.

Zij n_1 en n_3 het aantal knooppunten van een boom met graad 1 resp. met graad groter dan of gelijk aan 3. Bewijs dat $n_1 \geq n_3 + 2$.

Opgave 4.

Zij $G = (V, E)$ een samenhangende normale graaf. Toon aan dat er voor iedere tak e een voortbrengende boom is die e bevat.

Opgave 5.

Zij $T = (V, E)$ een boom. Toon aan dat ieder knooppunt v met $\delta(v) \geq 2$ een scheidingspunt is.

Opgave 6.

Laat T_1 en T_2 twee voortbrengende bomen zijn van een samenhangende graaf G . Toon aan dat als e een tak is van T_1 , er een tak f van T_2 bestaat zodanig dat $T_1 - \{e\} + \{f\}$ ook een voortbrengende boom is van G .

6. Vlakke grafen en duale grafen.

Onder een (meetkundige) graaf in de \mathbb{R}^D verstaan we een verzameling V van punten in de \mathbb{R}^D en een verzameling E van enkelvoudige krommen (Jordan krommen) z.d.d.

- (i) iedere gesloten kromme precies één punt van V bevat;
- (ii) iedere open kromme precies twee punten van V bevat, welke juist de eindpunten zijn;
- (iii) de krommen geen punten gemeen hebben, behalve de punten van V .

6.1 STELLING

Iedere graaf $G = (V, E)$ is isomorf met een graaf in \mathbb{R}^3 .

BEWIJS:

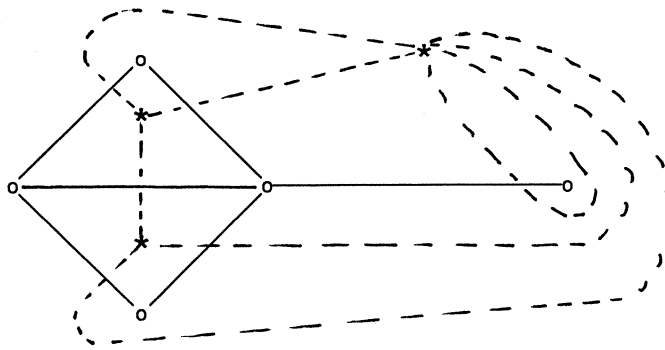
Neem een lijn l in de \mathbb{R}^3 . Voor iedere $v \in V$ kiezen we een (steeds verschillend) punt v' op l . Voor iedere tak $e = (v \& w)$ kiezen we een (eveneens steeds verschillend) vlak H door l . In dit vlak verbinden we v' en w' door een enkelvoudige kromme, die met l geen andere punten gemeen heeft. De aldus verkregen meetkundige graaf in de \mathbb{R}^3 is isomorf met G . ■

Een graaf heet vlak indien zij isomorf is met een graaf in de \mathbb{R}^2 .

Zij $G = (V, E)$ een in de \mathbb{R}^2 getekende vlakke graaf. Alle punten van \mathbb{R}^2 die niet tot V of E behoren vormen een verzameling van punten, zeg W . De verzameling W is de vereniging van een eindig aantal gebieden. De rand van een gebied wordt gevormd door een aantal takken, die de grenslijnen van het gebied heten.

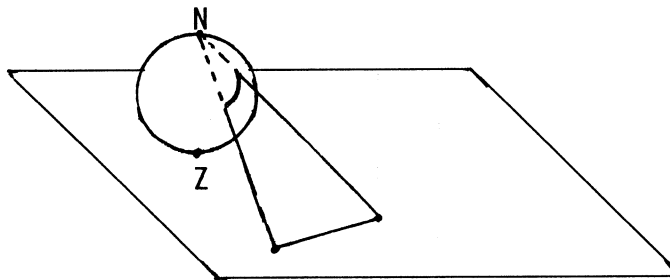
Laat $G = (V, E)$ een in de \mathbb{R}^2 getekende vlakke graaf zijn met gebieden R_i ($i = 1, 2, \dots, r$). Kies in ieder gebied een punt, zeg $v_i^* \in R_i$, $i = 1, 2, \dots, r$. Verbind de punten v_i^* en v_j^* als R_i en R_j een gemeenschappelijke grenslijn hebben, en wel zodanig dat $(v_i^* \& v_j^*)$ de gemeenschappelijke grens van R_i en R_j precies éénmaal snijdt en geen punt gemeen heeft met de andere krommen in E . Als een tak van E eindigt in een knooppunt van de graad 1 (deze tak is dan grenslijn tussen twee dezelfde gebieden, zeg R_i , dan krijgt v_i^* een lus die deze tak precies éénmaal snijdt en geen punten gemeen heeft met de andere takken van E . De aldus geconstrueerde graaf $G^* = (V^*, E^*)$ heet de (geometrisch) duale graaf van G . Het is duidelijk, dat alle duale grafen van G isomorf zijn; vandaar dat we spreken van de duale graaf. In figuur (6.2) zijn een graaf en haar duale getekend.

(6.2)



Ieder convex veelvlak is een meetkundige graaf die vlak is. Dit is in te zien door allereerst het veelvlak te projecteren op zijn omschreven bol en vervolgens de graaf op de bol via stereografische projectie om te zetten in een in de \mathbb{R}^2 getekende vlakke graaf.

(6.3)



Stereografische projectie:

Zet de bol op een plat vlak en noem het raakpunt Z. Het tegenovergestelde punt op de bol noemen we N. Zonder beperking van de algemeenheid mogen we aannemen dat N geen hoekpunt van de graaf is en niet op een tak ligt. Een punt v op de bol correspondeert nu met een uniek punt v' van het vlak; v' is het snijpunt van het vlak met de lijn door N en v. Deze afbeelding heeft een inverse afbeelding.

6.4 STELLING

Een samenhangende in de \mathbb{R}^2 getekende vlakke graaf met n knooppunten, m takken en r gebieden, voldoet aan de betrekking: $n - m + r = 2$.

BEWIJS:

De waarde $n - m + r$ blijft ongewijzigd als er een tak wordt weggelaten uit een kring, immers m en r worden beide één kleiner. Verwijder nu zoveel takken totdat er een voortbrengende boom overblijft.

Voor de boom geldt dat $r = 1$ en $m = n - 1$ en dus $n - m + r = 2$.

Dus ook voor de oorspronkelijke graaf geldt: $n - m + r = 2$. ■

De betrekking $n - m + r = 2$ heet Euler's veelvlakken formule.

Euler toonde in 1752 aan dat deze relatie geldt voor een convex veelvlak, waarbij n = aantal hoekpunten, m = aantal ribben en r = aantal zijvlakken.

We zullen nu nader ingaan op de vraag wanneer een graaf vlak is. Hierbij zijn twee grafen, welke niet vlak blijken te zijn, van groot belang:

- i. Kuratowski-graaf, type 1: de volledige 5-graaf K_5 ;
- ii. Kuratowski-graaf, type 2: de volledige bipartiete graaf $K_{3,3}$.

6.5 STELLING

De Kuratowski-grafen zijn niet vlak.

BEWIJS:

Type 1: Veronderstel dat de K_5 wel vlak is. Uit de formule van Euler volgt met $n = 5$ en $m = 10$ dat $r = 7$.

Ieder gebied heeft minstens drie grenslijnen, dus $3r \leq 2m = 20$: tegenspraak.

Conclusie: K_5 is niet vlak.

Type 2: Veronderstel dat de $K_{3,3}$ wel vlak is. Uit de formule van Euler volgt met $n = 6$ en $m = 9$ dat $r = 5$.

Ieder gebied heeft minstens 4 grenslijnen, dus $4r \leq 2m = 18$: tegenspraak.

Conclusie: $K_{3,3}$ is niet vlak. ■

Het splitsen van een tak in twee takken door toevoeging van een knooppunt van de graad 2 beïnvloedt het al dan niet vlak zijn niet. Hetzelfde geldt voor het weglaten van een knooppunt van de graad 2. Twee grafen G en G' zijn homeomorf als zij door transformaties van dit type tot isomorfe grafen kunnen worden getransformeerd.

6.6 STELLING VAN KURATOWSKI (1930)

Een graaf is vlak d.e.s.d als hij geen deelgraaf bevat die homeomorf is met de K_5 of de $K_{3,3}$.

BEWIJS:

Het bewijs van de implicatie \rightarrow volgt uit de stelling 6.5.

Het bewijs van de implicatie \leftarrow zullen we geven met volledige inductie naar het aantal takken, zeg m . Het is duidelijk dat de stelling geldt voor $m = 1$. Neem nu aan dat de stelling bewezen is voor alle grafen met hoogstens $m - 1$ takken. Laat G m takken hebben, niet vlak zijn en geen deelgraaf bevatten die homeomorf is met een der Kuratowski-grafen. Omdat iedere component met minder dan m takken volgens de inductieveronderstelling vlak is, mogen we aannemen dat G samenhangend is. De volgende 5 stappen leveren nu het bewijs.

1. G is niet separabel, immers:

Stel v is een scheidingspunt en $G - \{v\}$ heeft de componenten G_1, G_2, \dots, G_k . Iedere $G_i \cup \{v\}$ is volgens de inductieveronderstelling vlak en kan dus m.b.v. stereografische projectie zo in de \mathbb{R}^2 worden getekend dat v aan het buitengebied grenst. Maar dan is ook G in de \mathbb{R}^2 te tekenen als vlakke graaf.

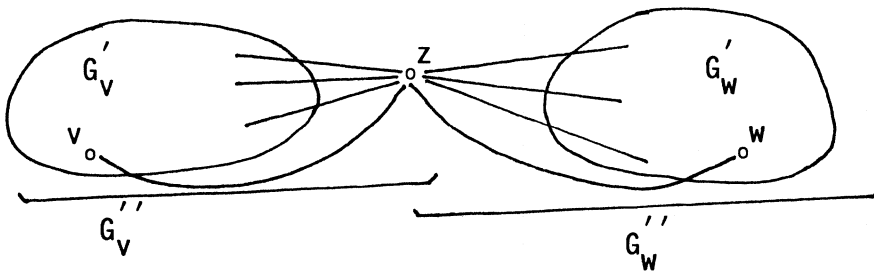
2. Bij verwijdering van een willekeurige tak (v & w) blijft er nog een kring over door v en w , immers:

Beschouw de graaf $G' := G - (v \text{ \& } w)$. G' is samenhangend (anders zijn v en w scheidingspunten). Neem aan dat G' separabel is met scheidingspunt z .

Als v en w in dezelfde component van $G' - \{z\}$ zitten, dan is z ook scheidingspunt in G . De knooppunten v en w zitten in verschillende componenten van $G' - \{z\}$: noem deze componenten G'_V en G'_W .

Zij $G''_V = G'_V + \{z\} + (v \text{ \& } z)$ en $G''_W = G'_W + \{z\} + (z \text{ \& } w)$.

G''_V en G''_W hebben hoogstens $m - 1$ takken en zijn dus volgens de inductieveronderstelling vlak of ze bevatten een Kuratowski-graaf.



G' is samenhangend, en er is dus in G' een keten tussen v en w die noodzakelijkerwijs via z loopt: $C[v, \dots, z, \dots, w]$.

Nu wordt G'' uit $G'_V + \{z\} + C[z, \dots, w] + (w \text{ \& } v) = G''''$ verkregen door een aantal knooppunten van de graad 2 weg te laten.

Omdat G'''' een deelgraaf is van G , bevat G'''' en dus ook G''_V geen Kuratowski-graaf. Hetzelfde geldt voor G''_W en dus zijn G''_V en G''_W beide vlak.

Door stereografische projectie kunnen we bereiken dat $(v \text{ \& } z)$ en $(w \text{ \& } z)$ op de grens met het buitengebied komen in G''_V resp. G''_W .

Verbinden we nu in het buitengebied v met w , dan krijgen we een vlakke graaf die G als deelgraaf bevat: tegenspraak! G' is dus niet separabel.

We zullen nu aantonen dat er in G' een kring is waar v en w op liggen.

Omdat G' samenhangend is, is er een keten C tussen v en w , zeg ter lengte p . Het bewijs gaat nu met inductie naar p en berust op het niet separabel zijn van G' .

Als $p = 1$, dan volgt direct uit G' niet separabel, dat er een kring bestaat door v en w . Stel nu dat de bewering waar is voor ketens van de lengte p en laat C een keten van lengte $p+1$ zijn:

$$C = [v = v_0, v_1, \dots, v_p, v_{p+1} = w].$$

Volgens de inductieveronderstelling zijn v_0 en v_p verbonden door twee disjuncte ketens C_1^1 en C_2^1 . Daar v_p geen scheidingspunt is, zal er een keten C^* tussen v_0 en v_{p+1} zijn waar v_p niet op ligt. Het eerste knooppunt van C_1^1 of van C_2^1 dat we ontmoeten als we van v_{p+1} langs C^* naar v_0 lopen noemen we v^* .

We onderscheiden de volgende gevallen:

a. Als $v^* = v_0$: neem $C_1 = C$ en $C_2 = C^*$.

b. Als $v^* \neq v_0$ en $v^* \in C_1^1$: neem

$$C_1 = C_1^1[v_0, v^*] \cup C^*[v^*, v_{p+1}] \text{ en}$$

$$C_2 = C_2^1 \cup (v_p, v_{p+1}).$$

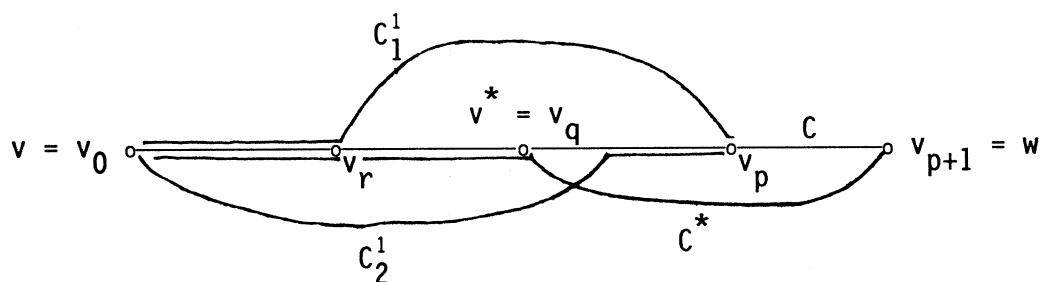
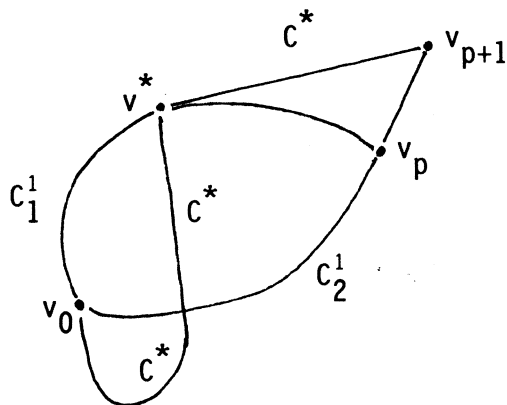
c. Als $v^* \neq v_0$ en $v^* \in C_2^1$: neem

$$C_1 = C_1^1 \cup (v_p, v_{p+1}) \text{ en}$$

$$C_2 = C_2^1[v_0, v^*] \cup C^*[v^*, v_{p+1}].$$

d. Als $v^* \neq v_0$, $v^* \in C$ en $v^* \notin C_1^1 \cup C_2^1$: stel $v^* = v_q$.

Loop over C vanuit v_q naar v_0 en laat v_r het eerste knooppunt van $C_1^1 \cup C_2^1$ zijn.



(i) Als $v_r = v_0$: neem $C_1 = C[v_r, v^*] \cup C^*[v^*, v_{p+1}]$ en $C_2 = C_2^1 \cup (v_p, v_{p+1})$.

(ii) Als $v_r \in C_1^1$: neem $C_1 = C_1^1[v_0, v_r] \cup C[v_r, v^*] \cup C^*[v^*, v_{p+1}]$ en

$$C_2 = C_2^1 \cup (v_p, v_{p+1}).$$

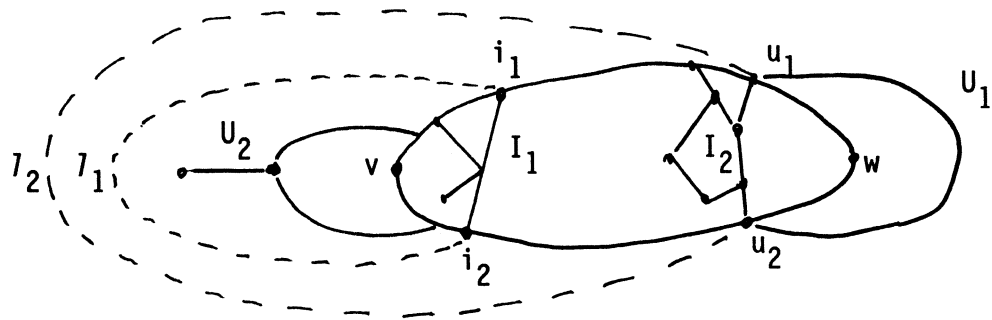
(iii) Als $v_r \in C_2^1$: neem $C_1 = C_1^1 \cup (v_p, v_{p+1})$ en

$$C_2 = C_2^1[v_0, v_r] \cup C[v_r, v^*] \cup C^*[v^*, v_{p+1}].$$

Alle mogelijkheden zijn onderzocht en de geconstrueerde ketens C_1 en C_2 vormen samen de gewenste kring.

3. Laat C een enkelvoudige kring zijn door v en w in de vlakke graaf G' z.d.d. C zoveel mogelijk gebieden in zijn inwendige bevat. Zij V_C de verzameling van de knooppunten die op C liggen. C verdeelt G' in een "uitwendige" en een "inwendige" graaf. Iedere component van de uitwendige graaf kan niet meer dan één knooppunt gemeen hebben met de ketens $C[v, w]$ en $C[w, v]$, want anders zou er een kring zijn die een groter aantal gebieden bevat. Omdat de graaf niet meer vlak is als we $(v \& w)$ toevoegen, moet zowel het binnengebied als het buitengebied van C een component hebben die een punt van zowel $C[v, w]$ als $C[w, v]$ bevat en deze punten moeten verschillend zijn van v en w .

4. Er is altijd een component $I = (V_I, E_I)$ van de inwendige graaf en een component $U = (V_U, E_U)$ van de uitwendige graaf die beide punten van zowel $C[v,w]$ als $C[w,v]$ bevatten en met knooppunten $i_1, i_2 \in V_I \cap V_C$ en $u_1, u_2 \in V_U \cap V_C$ z.d.d. de i 's en u 's alternerend op C liggen, immers:

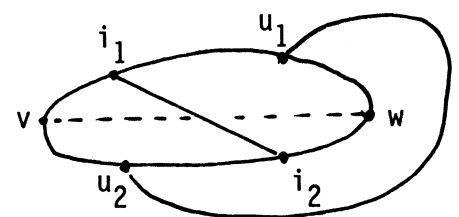


Stel dat dit niet zo is. Trek dan een tak γ_1 in het buitengebied tussen i_1 en i_2 z.d.d. γ_1 geen takken snijdt (dit kan daar de i 's en u 's niet alterneren). Elke component van de inwendige graaf die met C alleen knooppunten gemeen heeft van $C[i_2, i_1]$ kan naar het gebied begrensd door γ_1 en componenten zoals in bovenstaande figuur U_2 zonder dat de takken elkaar snijden. Eventueel blijft er nog een I_2 over die binnenpunten van $C[v,w]$ en $C[w,v]$ verbindt, doch hiervoor geldt hetzelfde. Na een eindig aantal transformaties zou dan het inwendige leeg zijn, zodat v met w verbonden kan worden terwijl G vlak blijft: tegenspraak.

5. We zullen nu alle mogelijkheden bekijken welke overgebleven zijn.

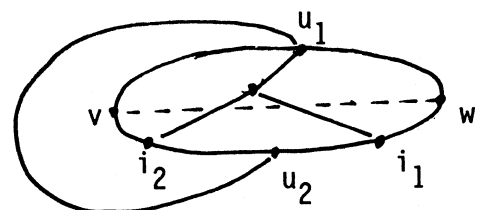
u_1 en u_2 zullen we daarbij steeds op $C[v,w]$ resp. $C[w,v]$ nemen.

- a. Alle i 's en u 's verschillend
en i_1 op $C[v,w]$ en i_2 op $C[w,v]$
(ook v en w verschillend van i_1, i_2, u_1, u_2)



$K_{3,3}$ als deelgraaf

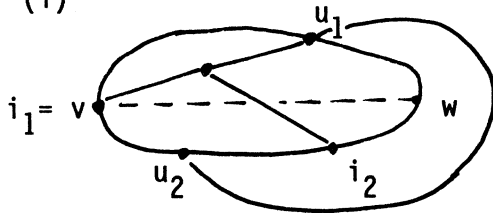
- b. alle i 's en u 's verschillend
en i_1 en i_2 beide op $C[v,w]$
of $C[w,v]$ (ook v en w verschillend van i_1, i_2, u_1, u_2).



$K_{3,3}$ als deelgraaf

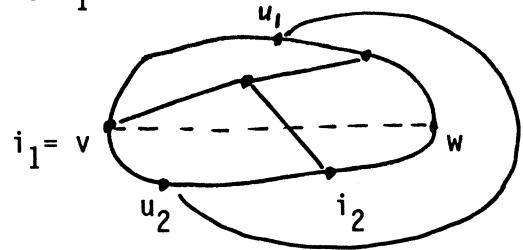
c. een der i 's valt samen met v of w , zeg $i_1 = v$.

(i)



$K_{3,3}$ als deelgraaf

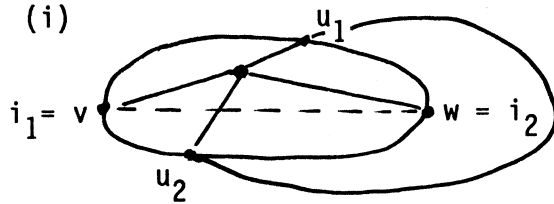
(ii)



$K_{3,3}$ als deelgraaf

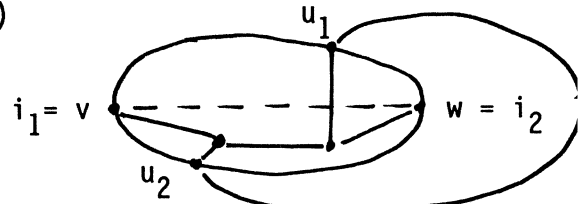
d. $i_1 = v$ en $i_2 = w$.

(i)



K_5 als deelgraaf

(ii)



$K_{3,3}$ als deelgraaf

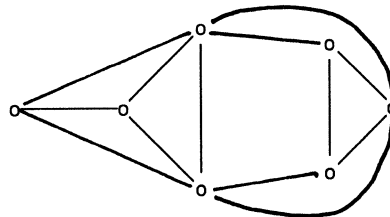
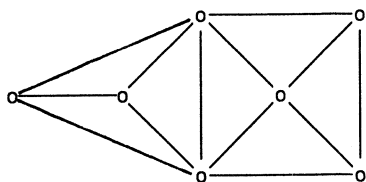
In alle gevallen bevat G dus een Kuratowsk-graaf: tegenspraak!

Conclusie: G is een vlakke graaf. ■

We besluiten deze paragraaf met nader in te gaan op het verband tussen een in de \mathbb{R}^2 getekende graaf en haar duale graaf G^* .

Indien graaf G isomorf is met graaf H dan hoeft G^* niet isomorf te zijn met H^* . De duale grafen van de in figuur 6.7 getekende isomorfe grafen zijn niet isomorf.

(6.7)



Dit betekent dat we alleen bij in de \mathbb{R}^2 getekende vlakke grafen de geometrische duale graaf kunnen bepalen. Als we in het vervolg over een vlak-getekende graaf spreken dan bedoelen we een in de \mathbb{R}^2 getekende vlakke graaf. Voor G een vlak getekende, samenhangende graaf geldt dat ook G^* vlak-getekend en samenhangend is. De volgende stelling geeft het verband tussen de aantallen knooppunten, takken en gebieden van G en G^* .

Merk op dat G^* altijd samenhangend is, ook als G niet samenhangend is.

6.8 STELLING

Zij G een vlak getekende, samenhangende graaf met n knooppunten, m takken en r gebieden. Zij G^* de (geometrisch) duale graaf met n^* knooppunten, m^* takken en r^* gebieden.

Dan geldt: $n^* = r$, $m^* = m$ en $r^* = n$.

BEWIJS:

De gelijkheden $n^* = r$ en $m^* = m$ volgen onmiddellijk uit de definitie van G^* . Zowel voor G als G^* geldt Euler's formule. De derde gelijkheid volgt onmiddellijk door de eerste gelijkheden te substitueren in de formule van Euler: $2 = n - m + r = n^* - m^* + r^* = r - m + r^*$, dus $n = r^*$. ■

6.9 STELLING

Zij G een vlak-getekende, samenhangende graaf, dan geldt dat de duale van de duale van G (d.w.z. G^{**}) isomorf is met G .

BEWIJS:

Indien we kunnen bewijzen dat in ieder gebied van G^* precies één knooppunt van G ligt, dan kunnen we de constructie van G^* uit G omkeren. Deze omkering geeft dan G als duale van G^* . Het is duidelijk dat ieder gebied van G^* tenminste één knooppunt van G moet bevatten. Dat het er precies één is, volgt uit stelling 6.8, immers $r^* = n$. ■

Takken van G en G^* die elkaar kruisen noemen we corresponderend, de verzameling van takken in G^* die corresponderen met een verzameling van takken in G noemen we een duale verzameling.

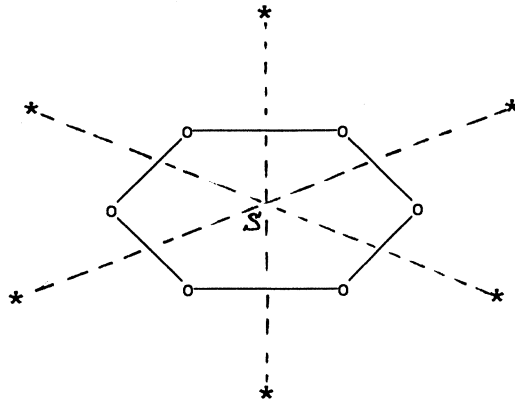
6.10. STELLING

Zij G een vlak getekende samenhangende graaf met G^* als (geometrisch) duale. Een verzameling van takken in G is een enkelvoudige kring d.e.s.d als de duale verzameling van takken in G^* een minimale snede vormen.

BEWIJS:

We tonen eerst aan dat C^* een snede is indien C een enkelvoudige kring is. Indien C een enkelvoudige kring is in G , dan omsluit C één of meer van de gebieden van G . Dus C omvat een niet-lege verzameling S van knooppunten van G^* . De takken van G^* die de takken van C snijden vormen de snede tussen S en het complement van S in G^* (zie figuur 6.11).

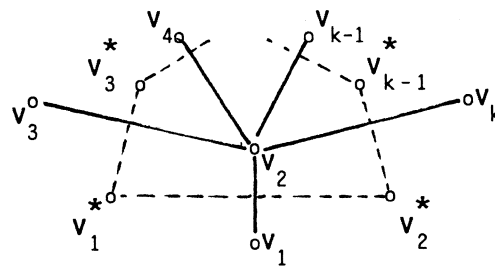
(6.11)



Vervolgens tonen we aan dat C een kring bevat indien C^* een snede is. Veronderstel dat C^* een snede is tussen de knooppuntenverzamelingen V_1^* en V_2^* van de duale graaf G^* .

Zij $e^* = (v_1^* \& v_2^*) \in C^*$ en zij $e = (v_1 \& v_2)$ de corresponderende tak in G . We tonen aan dat v_2 geen eindpunt is in C . Indien v_2 een eindpunt is in G ,

(6.12)



dan geldt $v_1^* = v_2^*$, wat in tegenspraak is met de aanname dat $V_1^* \cap V_2^* = \emptyset$.

Laten $e_3 = (v_2 \& v_3)$, $e_4 = (v_2 \& v_4)$, ..., $e_k = (v_2 \& v_k)$ tezamen met $(v_1 \& v_2)$ de verzameling van takken in G zijn met v_2 als eindpunt. De takken $(v_2 \& v_3)$ en $(v_2 \& v_4)$ zijn grenstakken bij een gebied van G . In dit gebied ligt een knooppunt van de duale graaf, zeg v_3^* . Het is mogelijk dat de takken $(v_1 \& v_2)$, $(v_2 \& v_3)$ en $(v_2 \& v_4)$ grenslijnen zijn van hetzelfde gebied.

Dan geldt dat $v_3^* = v_1^*$.

Het is niet mogelijk dat $v_1^* = v_3^* = v_2^*$, immers $v_1^* \in V_1^*$, $v_2^* \in V_2^*$ en $V_1^* \cap V_2^* = \emptyset$.

Laten we veronderstellen dat v_i^* het knooppunt uit G^* is dat correspondeert met het gebied waarvan $(v_2 \& v_i)$ en $(v_2 \& v_{i+1})$ grenslijnen zijn.

Dan geldt òf $v_i^* \in V_1^*$ òf $v_i^* \in V_2^*$.

De met e_2, \dots, e_k corresponderende takken e_2^*, \dots, e_k^* vormen een keten tussen v_1^* en v_2^* . Minstens één daarvan, zeg e_i^* , moet tot de snede C^* behoren. De

duale tak e_j behoort tot C . Het is niet mogelijk dat $e_j = e$, immers dan zou $v_1^* = v_2^*$ moeten zijn.

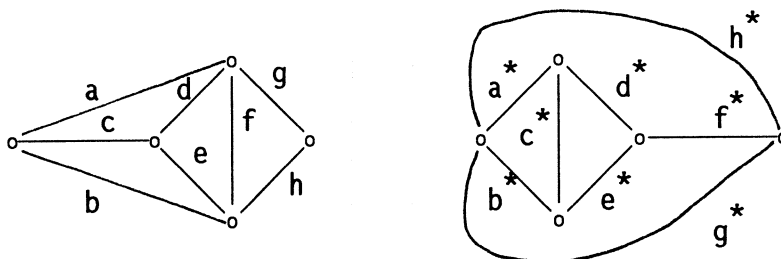
We concluderen uit het bovenstaande dat er in C een tak e_j moet zijn ongelijk aan e . Het bovenstaande argument herhalend vinden we dat er in C ook een tak ongelijk aan e_j moet zijn. Dit kan e zijn, in dat geval bevat C een kring. Daar er in G slechts eindig veel takken zijn vinden we door bovenstaande argumenten herhaald toe te passen dat C altijd een kring bevat. Indien de takkenverzameling C een kring bevat doch niet een enkelvoudige kring is dan kunnen we een echte deelverzameling, zeg C_1 , kiezen die ook een kring bevat. Volgens het bovenstaande geldt dat C_1^* een snede bevat. Daar C_1^* echt bevat is in C^* , kan nooit C^* een minimale snede geweest zijn. Dus een minimale snede kan alleen de duale verzameling zijn van een enkelvoudige kring. Omgekeerd kan een enkelvoudige kring alleen de duale verzameling zijn van een minimale snede. ■

6.13 GEVOLG. Een verzameling van takken in G is een minimale snede d.e.s.d. als de duale verzameling een enkelvoudige kring in G^* vormt.

BEWIJS: Dualiseer en gebruik stelling 6.9.

We noemen de graaf G^\circledast een abstract duale graaf van G indien er een één-één-correspondentie is tussen de takken van G en die van G^\circledast z.d.d. een verzameling van takken in G een enkelvoudige kring is d.e.s.d. als de corresponderende verzameling van takken in G^\circledast een minimale snede is.

(6.14)



In figuur (6.14) is een graaf met een abstract duale graaf getekend. Een graaf kan meerdere niet isomorfe abstracte duale grafen hebben (zie (6.7)).

6.15 STELLING

Indien G^\circledast een abstract duale graaf van G is, dan is G een abstract duale graaf van G^\circledast .

BEWIJS:

Laat C een minimale snede van G zijn, en C^* de corresponderende takkenverzameling van G^\circledast . Omdat C een even aantal takken gemeen heeft met elke kring van G , heeft C^* een even aantal takken gemeen met elke snede in G^\circledast .

Omdat de bij een willekeurig knooppunt behorende takken een snede vormen, heeft de deelgraaf (V^*, C^*) een even graad in ieder knooppunt. Hieruit volgt dat C^* bestaat uit een aantal disjuncte kringen.

Vervolgens tonen we aan dat als C^* een enkelvoudige kring is in G^\circledast , dat dan C een snede is.

Laat C^* een enkelvoudige kring in G^\circledast zijn en C de corresponderende takkenverzameling in G . Omdat C^* een even aantal takken gemeen heeft met iedere snede in G^\circledast , heeft C een even aantal takken gemeen met iedere kring in G . Het is niet moeilijk om in te zien dat dan voor iedere kring in G de knooppunten toegewezen kunnen worden aan V_1 en V_2 zdd. takken van C tussen V_1 en V_2 lopen (start met de eerste kring en neem steeds een volgende kring erbij). C is dus een snede.

Laat C nu een minimale snede zijn in G . We hebben gezien dat $C^* = C_1^* \cup \dots \cup C_k^*$, met iedere C_i^* een enkelvoudige kring in G^\circledast . Tevens hebben we gezien dat dan C_i dan een snede is in G . Omdat $C = C_1 \cup \dots \cup C_k$ een minimale snede is, is $k = 1$. Hiermee is aangetoond dat minimale sneden van G corresponderen met enkelvoudige kringen van G^\circledast . ■

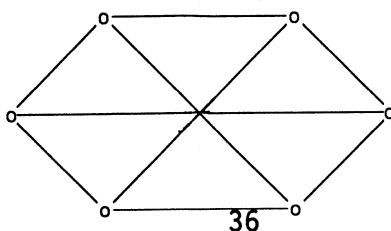
6.16 STELLING

Een graaf is vlak d.e.s.d. als de graaf een abstract-duale graaf heeft.

BEWIJS:

Uit stelling 6.10 volgt dat het voldoende is om aan te tonen dat als G niet vlak is, dan heeft G geen abstract-duale graaf. Het bewijs bestaat uit 6 stappen.

1. Veronderstel dat de $K_{3,3}$ een abstract-duale graaf D heeft. Omdat $K_{3,3}$ alleen enkelvoudige kringen heeft van de lengte 4 of 6, heeft iedere snede in D tenminste 4 takken. Ieder knooppunt van D heeft dus tenminste de graad 4. Omdat de $K_{3,3}$ geen snede bestaande uit 1 of 2 takken heeft, heeft D geen kringen van de lengte 1 of 2. D is dus een normale graaf, waarin ieder knooppunt tenminste graad 4 heeft. D heeft dus minstens 5 knooppunten en 10 takken, terwijl de $K_{3,3}$ 9 takken heeft. Dit levert de tegenspraak.
2. Veronderstel dat de K_5 een abstract-duale graaf H heeft. De K_5 bevat een minimale snede bestaande uit 6 takken, dus H bevat een enkelvoudige kring C bestaande uit 6 takken. Iedere snede in de K_5 heeft minstens 4 takken, dus iedere kring in H heeft ook minstens 4 takken. De bij C behorende deelgraaf bevat dus maximaal 9 takken. Er is in H dus nog een knooppunt.



Omdat de K_5 een normale graaf is, is in H de graad van ieder knooppunt tenminste 3. Omdat er minstens 7 knooppunten zijn, zijn er dus minstens 11 takken: tegenspraak.

3. Als G een duale graaf G^{\circledast} heeft en e is een tak van G , dan heeft $G - \{e\}$ ook een duale graaf, immers:

Zij e^* de tak van G^{\circledast} corresponderend met e . Laat H^{\circledast} uit G^{\circledast} worden verkregen door de eindpunten van e^* samen te voegen. Het is eenvoudig in te zien dat H^{\circledast} de abstract-duale graaf van $G - \{e\}$ is.

4. Door stap 3 herhaald toe te passen kan worden aangetoond dat als G een abstract-duale graaf heeft, dan ook iedere deelgraaf van G .

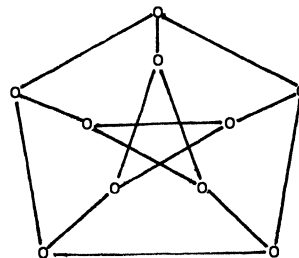
5. Als G een abstract-duale graaf heeft, dan ook iedere graaf die op knooppunten van de graad 2 na isomorf is met G , immers:

Als H uit G ontstaat door op een tak e een knooppunt van de graad 2 te introduceren, dan wordt H^{\circledast} uit G^{\circledast} verkregen door een tak evenwijdig aan e^* toe te voegen. Het is direct te verifiëren dat H^{\circledast} voldoet. Voor het verwijderen van een knooppunt van de graad 2 geldt een analoog argument.

6. Neem nu aan dat G niet vlak is. Volgens de stelling van Kuratowski heeft G een deelgraaf die (op knooppunten van de graad 2 na) isomorf is met de $K_{3,3}$ of de K_5 , wat niet het geval is. G heeft dus geen abstract-duale graaf. ■

Opgave 1.

Laat zien dat nevenstaande graaf niet vlak is.



Opgave 2.

Toon aan dat de duale graaf van een wielgraaf weer een wielgraaf is.

Opgave 3.

Bestaat er een vlakke graaf met 5 gebieden zodanig dat ieder tweetal gebieden een gemeenschappelijke grenslijn heeft?

Opgave 4.

Zij G een normale, samenhangende vlakke graaf met m takken en $n \geq 3$.

- Toon aan dat $m \leq 3n-6$.
- Toon aan dat er een knooppunt v is met $\delta(v) \leq 5$.
- Toon aan dat als $n = 6$ en $m = 12$ ieder gebied precies 3 grenslijnen heeft.

Opgave 5.

Zij G een vlakke graaf. Toon aan dat G bipartiet is d.e.s.d. als G^* Euler is.

Opgave 6.

Als ieder gebied in een normale, vlakke samenhangende graaf k grenslijnen heeft, dan is $m = \frac{k(n-2)}{k-2}$. Toon dit aan.

Opgave 7.

Zij G een vlakke, samenhangende graaf waarin iedere kring minstens $k \geq 3$ takken bevat.

- Toon aan dat $m \leq \frac{k(n-2)}{k-2}$.
- Gebruik onderdeel a om aan te tonen dat de K_5 , de $K_{3,3}$ en de graaf uit opgave 1 niet vlak zijn.

Opgave 8.

- Als G vlak is, is dan de lijngraaf $L(G)$ eveneens vlak?
- Als G niet vlak is, is dan de lijngraaf $L(G)$ eveneens niet vlak?

Opgave 9.

Zij G een vlakke samenhangende p -reguliere graaf met een duale graaf G^* die p^* -regulier is.

Toon aan dat $(p-2)(p^*-2) < 4$.

Opgave 10.

Als G en de complementaire graaf \bar{G} beide vlak zijn, dan is $n \leq 10$. Bewijs dit.

II. COMBINATORIEK

Literatuur

- Anderson, I.: "A first course in combinatorial mathematics",
Clarendon Press, 1974.
- Liu, C.L. : "Introduction to combinatorial mathematics",
McGraw-Hill, 1968
- Tucker, A.: "Applied combinatorics", Wiley, 1980

7. Permutaties, combinaties.

Permutaties

Laat $p(n)$ het aantal permutaties (rangschikkingen) aanduiden van n voorwerpen. Een permutatie verkrijgen we door één van de n objecten te kiezen als eerste van de rij. Dit kan op n manieren geschieden. De $(n-1)$ overblijvende voorwerpen hebben $p(n-1)$ permutaties. Er geldt dus de recurrente betrekking $p(n) = np(n-1)$. Met de randvoorwaarde $p(1) = 1$ vinden we:

$$p(n) = n!$$

r-rangschikkingen

Laat $p(n,r)$ het aantal aanduiden van geordende rijen van r elementen uit n voorwerpen. Het eerste object in de rij kan op n verschillende wijzen gekozen worden. De resterende $r-1$ objecten moeten dan uit de $(n-1)$ overblijvende voorwerpen gekozen worden.

Dit geeft de recurrente betrekking: $p(n,r) = np(n-1,r-1)$.

Dus $p(n,r) = n(n-1)\cdots(n-r+2)\cdot p(n-r+1,1)$. Met de randvoorwaarde $p(s,1) = s$ vinden we dan:

$$p(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

r-combinaties

Laat $c(n,r)$ de notatie zijn voor het aantal waarop r objecten uit een verzameling van n voorwerpen gekozen kan worden, zonder daarbij op de volgorde te letten. We zeggen dat $c(n,r)$ het aantal combinaties van r uit n elementen is. Een combinatie van r elementen kan op $r!$ manieren geordend worden. Iedere geordende combinatie is een geordende rij van r elementen uit n voorwerpen. Dus $p(n,r) = r!c(n,r)$. Waaruit volgt

$$c(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}.$$

7.1 STELLING

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \text{ voor } r = 0, 1, \dots, n.$$

1e BEWIJS:

De keuzen van r uit n objecten is equivalent met het aanwijzen van $(n-r)$ objecten die niet uitgekozen worden.

2e BEWIJS:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-(n-r))!(n-r)!} = \binom{n}{n-r}. \quad \blacksquare$$

7.2 STELLING

Indien $(1+x)^n$ met n een natuurlijk getal in een machtreeks van x ontwikkeld wordt, dan is de coëfficiënt van x^r gelijk aan $\binom{n}{r}$.

BEWIJS:

Beschouw het product $(1+x)(1+x)\dots(1+x)$, bestaande uit n factoren. Een term x^r verkrijgen we door uit r factoren de term x te kiezen en uit de overige factoren de term 1 te kiezen. Dit kan op $c(n,r)$ manieren gebeuren. \blacksquare

Driehoek van Pascal

			1			
		1	1			
		1	2	1		
	1	3	3	1		
	1	4	6	4	1	
	1	5	10	10	5	1
	etc.					etc.

De $(n+1)^e$ rij geeft de getallen $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$. Stelling 7.1 zegt nu dat iedere rij van links naar rechts gelezen, gelijk is aan de rij van rechts naar links gelezen. We zien dat in de driehoek van Pascal ieder getal de som is van de twee getallen die er direct boven staan. Deze recurrente betrekking zullen we bewijzen in de volgende stelling.

7.3 STELLING

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}.$$

1e BEWIJS:

$\binom{n}{r}$ is het aantal keuzen van r uit n objecten. Iedere speciale keuze bevat het n -de object al of niet.

Als het n -de object in de keuze zit, dan blijft over een keuze van $(r-1)$ uit $(n-1)$ objecten. Er zijn $\binom{n-1}{r-1}$ van deze combinaties.

Als het n -de object niet in de combinatie zit, dan moeten er r objecten uit $(n-1)$ gekozen worden, er zijn $\binom{n-1}{r}$ van deze keuzen mogelijk.

Omdat beide bovenstaande gevallen elkaar uitsluiten, geldt:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}. \quad \blacksquare$$

2e BEWIJS:

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} = \frac{(n-1)!}{r!(n-r)!} \{r+(n-r)\} = \binom{n}{r}. \quad \blacksquare$$

Stelling 7.2 zegt

$$(7.4) \quad (1+x)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r.$$

Algemeen geldt:

7.5 STELLING (*Binomium van Newton*)

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r.$$

BEWIJS:

$$(a + b)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = a^n \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \left(\frac{b}{a}\right)^r = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r. \quad \blacksquare$$

De getallen $\binom{n}{r}$ worden binomiaalcoëfficiënten genoemd. Bij een rij van getallen $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$ definiëren we de (formele) machtreeks

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots.$$

Bij een eindige rij van getallen a_0, a_1, \dots, a_m nemen we $a_n = 0$ voor $n > m$.

De functie $f(x)$ noemen we de voortbrengende functie van de rij. Volgens (7.4) geldt nu dat $(1+x)^n$ de voortbrengende functie is van de binomiaalcoëfficiënten $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$.

k-herhalingscombinaties

Laat $f(n,k)$ aanduiden het aantal manieren waarop k identieke objecten over n verschillende dozen verdeeld kunnen worden. Iedere object wordt in één doos gedaan. We zeggen dat $f(n,k)$ het aantal herhalingscombinaties is van k uit n elementen.

Iedere verdeling kunnen we representeren door een rij van kruistekens en nullen met $n+k-1$ elementen. Bijvoorbeeld,

x x o x o x o x

betekent dat 2 objecten in de 1e doos worden gedaan, 1 object in de 2e doos, 1 object in doos 3 en 1 object in de 4e doos. De nullen dienen als scheidingstekens tussen de dozen. Er zijn dus $n-1$ nullen en k kruistekens. Een andere verdeling van 5 objecten over 4 dozen is bijvoorbeeld,

x x o o x x o x

Nu worden 2 objecten in doos 1 gedaan, 0 doos 2, 2 in doos 3 en 1 in doos 4. Dus het aantal verdelingen is gelijk aan het aantal rijen van 0 en x-tekens die precies $(n-1)$ o-tekens en k x-tekens bevatten. Iedere rij bevat $(n+k-1)$ symbolen en wordt precies bepaald door de plaatsen van de o tekens. Dus: $f(n,k)$ is gelijk aan het aantal combinaties van $n-1$ uit $n+k-1$ elementen. Conclusie,

$$(7.6) \quad f(n,k) = c(n+k-1, n-1) = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

We geven nu een afleiding met behulp van de voortbrengende functie. Daartoe beschouwen we het produkt met n factoren:

$$(1+x+x^2+x^3+\dots)(1+x+x^2+x^3+\dots)\dots(1+x+x^2+x^3+\dots).$$

Een term x^k krijgen we door uit de i -de factor de term x^{t_i} te kiezen zdd. $t_1+t_2+\dots+t_n = k$. We kunnen dit weer zien als de representatie van een verdeling $,n|$. t_1 in doos 1, t_2 in doos 2, ... , t_n in doos n .

Dus $f(n,k)$ is de coëfficiënt van x^k in de machtreeksontwikkeling van $(1+x^1+x^2+\dots)^n = (1-x)^{-n}$.

Anders gezegd: $(1-x)^{-n}$ is de voortbrengende functie van de getallen, $f(n,0)$, $f(n,1)$, $f(n,2)$, ...

Uit de theorie der machtreeksen weten we dat

$$(1-x)^{-n} = 1 + \frac{n}{1} x + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots + \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} x^k + \dots$$

Dus,

$$f(n, k) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Omgekeerd kunnen we stellen dat uit bovenstaande analyse volgt dat indien $(1-x)^{-n}$ in een machtreeks te ontwikkelen is de coëfficiënten $f(n,0)$, $f(n,1)$, ... moeten zijn. Met de 1e afleiding van de gelijkheden (7.6) hebben we dan aangetoond dat de machtreeksontwikkeling van $(1-x)^{-n}$ wordt gegeven door,

$$(7.7) \quad (1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} x^k,$$

dit onder de aanname dat $(1-x)^{-n}$ in een machtreeks ontwikkeld kan worden.

Opgave 1.

Op hoeveel verschillende manieren kunnen 5 mannen en 5 vrouwen aan een ronde tafel gaan zitten z.d.d. elke man tussen 2 vrouwen zit?

Opgave 2.

Een collegezaal die 201 zitplaatsen heeft wordt gebruikt om een college aan 200 studenten te geven. Op hoeveel manieren kan de eerste rij, die 20 plaatsen heeft, worden bezet?

Opgave 3.

Toon aan dat voor ieder natuurlijk getal n geldt: $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$.

Opgave 4.

Bewijs met combinatorische argumenten dat voor $n \leq i \leq m$ geldt:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{m-n}{i-k} = \binom{m}{i}.$$

Opgave 5.

Zij $h(n,k)$ met $k \geq n$ het aantal manieren om k voorwerpen te kleuren met n kleuren zdd. ieder voorwerp één kleur heeft en iedere kleur minstens één keer wordt gebruikt. Bewijs dat,

a. $h(n,k)$ is de coëfficiënt van x^k in $(x+x^2+x^3+\dots)^n$.

b. $h(n,k) = \binom{k-1}{n-1}$.

Opgave 6.

Bewijs dat voor $0 < k \leq n$: $\binom{n+k-1}{n-1} = \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} \binom{n}{i}$.

8. Recurrente betrekkingen, voortbrengende functies.

We geven in deze paragraaf een aantal methoden om recurrente betrekkingen op te lossen. Net zoals bij differentiaalvergelijkingen is er geen algemene methode. Het oplossen van recurrente betrekkingen is veelal meer kunst dan kunde. Voor de homogene lineaire recurrente betrekking met constante coëfficiënten is er wel een algemene oplossingsmethode. We illustreren deze aan de hand van de 2e-orde recurrente betrekking,

$$(8.1) \quad a_n = A a_{n-1} + B a_{n-2} \quad (n \geq 3),$$

waarin A en B constanten zijn die niet van n afhangen.

Als $B = 0$, dan is deze eenvoudig op te lossen:

$$a_n = A a_{n-1} = A^2 a_{n-2} = \dots = A^{n-1} a_1.$$

We nemen dus verder aan dat $B \neq 0$.

8.2 STELLING

Voor een recurrente betrekking (8.1) met randvoorwaarden a_1 en a_2 geldt:

(i) Als de wortels α, β van de vergelijking $x^2 = Ax + B$ verschillend zijn, dan

$$(8.3a) \quad a_n = K_1 \alpha^n + K_2 \beta^n, \quad n \geq 1,$$

met constanten K_1 en K_2 die eenduidig bepaald zijn door a_1 en a_2 ;

(ii) Als $x^2 = Ax + B$ een tweevoudige wortel α heeft, dan is,

$$(8.3b) \quad a_n = (K_1 + nK_2) \alpha^n, \quad n \geq 1,$$

waarbij de constanten K_1 en K_2 eveneens door a_1 en a_2 worden bepaald.

BEWIJS:

(i) We merken allereerst op dat a_1 en a_2 de constanten K_1 en K_2 eenduidig bepalen: Het lineaire stelsel in de onbekenden K_1, K_2 ,

$$\begin{cases} a_1 = \alpha K_1 + \beta K_2 \\ a_2 = \alpha^2 K_1 + \beta^2 K_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

heeft een unieke oplossing. Immers de determinant is gelijk aan $\alpha\beta(\beta-\alpha)$ en $\alpha\beta(\beta-\alpha) \neq 0$, omdat $B \neq 0$ zijn α en $\beta \neq 0$, en verder is $\alpha \neq \beta$.

We bewijzen dat (8.3a) juist is met inductie naar n. Voor $n = 1, 2$ volgt de juistheid uit de bepaling van K_1 en K_2 .

Veronderstel dat (8.3a) juist is voor $n \leq k-1$. Dan geldt,

$$a_{k-1} = K_1 \alpha^{k-1} + K_2 \beta^{k-1}, \quad a_{k-2} = K_1 \alpha^{k-2} + K_2 \beta^{k-2}.$$

Waaruit volgt:

$$\begin{aligned} a_k &= Aa_{k-1} + Ba_{k-2} = K_1(A\alpha^{k-1} + B\alpha^{k-2}) + K_2(A\beta^{k-1} + B\beta^{k-2}) \\ &= K_1 \alpha^{k-2}(A\alpha + B) + K_2 \beta^{k-2}(A\beta + B) = K_1 \alpha^{k-2} \alpha^2 + K_2 \beta^{k-2} \beta^2 \\ &= K_1 \alpha^k + K_2 \beta^k. \end{aligned}$$

(ii) Merk op dat in dit geval $x^2 - Ax - B = 0 \Leftrightarrow (x - \alpha)^2 = 0 \Leftrightarrow A = 2\alpha$ en $B = -\alpha^2$.

Net zoals in onderdeel (i) merken we allereerst op dat a_1 en a_2 de constanten K_1 en K_2 eenduidig bepalen:

Het lineaire stelsel in de onbekenden K_1, K_2 ,

$$\begin{cases} a_1 = \alpha K_1 + \alpha K_2 \\ a_2 = \alpha^2 K_1 + 2\alpha^2 K_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha^2 & 2\alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

heeft een unieke oplossing. Immers de determinant is gelijk aan $\alpha^3 \neq 0$, omdat $B \neq 0$.

We bewijzen dat (8.3b) juist is met inductie naar n . Voor $n = 1, 2$ volgt de juistheid uit de bepaling van K_1 en K_2 .

Veronderstel dat (8.3b) juist is voor $n \leq k-1$. Dan geldt,

$$a_{k-1} = [K_1 + (k-1)K_2] \alpha^{k-1}, \quad a_{k-2} = [K_1 + (k-2)K_2] \alpha^{k-2}.$$

Waaruit volgt:

$$\begin{aligned} a_k &= A[K_1 + (k-1)K_2] \alpha^{k-1} + B[K_1 + (k-2)K_2] \alpha^{k-2} \\ &= K_1 \alpha^{k-2}(A\alpha + B) + K_2 \alpha^{k-2} [(k-1)A + (k-2)B] \\ &= K_1 \alpha^{k-2} \alpha^2 + K_2 \alpha^{k-2} [(k-1)2\alpha^2 - (k-2)\alpha^2] = (K_1 + kK_2) \alpha^k. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

In de 13e eeuw bestudeerde Leonardo Fibonacci van Pisa de groei van een rattenpopulatie. Ieder paar ratten produceert haar eerste paar nakomelingen na twee maanden, daarna iedere maand een paar. Beginnend met één pasgeboren paar zal de groei van de populatie als volgt verlopen. Na één maand is er 1 paar, na twee maanden zijn er 2 paren. Indien het aantal paren na n maanden wordt aangeduid met a_n dan geldt de recurrente betrekking:

$$(8.4) \quad \begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 2). \\ a_0 = 1; a_1 = 1 \end{cases}$$

Immers, aannemende dat er geen ratten doodgaan, is de populatie na n maanden die na $(n-1)$ maanden (d.w.z. a_{n-1}) plus het aantal nieuwgeboren paren, dit is gelijk aan het aantal paren dat minstens twee maanden oud is (d.w.z. a_{n-2}).

De getallenrij gedefiniëerd door de recurrente betrekking (8.4) met beginvoorwaarden $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ worden Fibonacci getallen genoemd. Laten we deze getallen "berekenen" m.b.v. stelling 8.2. Daartoe moeten we de wortels bepalen van het karakteristieke polynoom $x^2 - Ax - B$.

In dit geval is dit polynoom $x^2 - x + 1$ met als wortels:

$$\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \quad \text{en} \quad \beta = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}).$$

Dus,

$$a_n = K_1 \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]^n + K_2 \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right]^n.$$

Met $a_0 = 1$ en $a_1 = 1$ vinden we dat $K_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ en $K_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, waaruit volgt dat

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right]^{n+1}.$$

Door toepassing van het binomium van Newton kunnen we a_n ook anders schrijven:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 5^{k/2} - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k 5^{k/2} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} [5^{k/2} - (-1)^k 5^{k/2}] \\ &= \frac{1}{2^n} \left\{ \binom{n+1}{1} + 5 \binom{n+1}{3} + 5^2 \binom{n+1}{5} + \dots + 5^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} 5^k. \end{aligned}$$

De recurrente betrekking (8.1) heet homogeen. De inhomogene betrekking van de 2e orde is

$$(8.5) \quad a_n = A a_{n-1} + B a_{n-2} + f(n), \quad n \geq 3 \quad (a_1 \text{ en } a_2 \text{ gegeven}),$$

met $f(n)$ een bekende functie.

8.6 STELLING

Zij p_n een rij getallen die aan (8.5) voldoet, dan wordt de algemene oplossing van gegeven door:

- (i) $a_n = p_n + K_1\alpha^n + K_2\beta^n$ als α en β verschillende wortels zijn van de vergelijking $x^2 - Ax - B = 0$, terwijl K_1 en K_2 worden bepaald door a_1 en a_2 ;
(ii) $a_n = p_n + (K_1 + nK_2)\alpha^n$ als α een tweevoudige wortel is van de vergelijking $x^2 - Ax - B = 0$, terwijl K_1 en K_2 worden bepaald door a_1 en a_2 .

BEWIJS:

We passen weer inductie naar n toe. Het bewijs dat K_1 en K_2 eenduidig worden bepaald door a_1 en a_2 is analoog aan dat van stelling 8.2.

Veronderstel dat de stelling juist is voor $n \leq k - 1$. Dan geldt in het geval van twee verschillende wortels (het andere geval gaat analoog):

$$a_{k-1} = K_1\alpha^{k-1} + K_2\beta^{k-1} + p_{k-1}, \quad a_{k-2} = K_1\alpha^{k-2} + K_2\beta^{k-2} + p_{k-2},$$

waaruit volgt:

$$\begin{aligned} a_k &= Aa_{k-1} + Ba_{k-2} + f(k) \\ &= K_1(A\alpha^{k-1} + B\alpha^{k-2}) + K_2(A\beta^{k-1} + B\beta^{k-2}) + Ap_{k-1} + Bp_{k-2} + f(k) \\ &= K_1\alpha^{k-2}(A\alpha + B) + K_2\beta^{k-2}(A\beta + B) + Ap_{k-1} + Bp_{k-2} + f(k) \\ &= K_1\alpha^{k-2}\alpha^2 + K_2\beta^{k-2}\beta^2 + p_k = K_1\alpha^k + K_2\beta^k + p_k. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Er wordt geen recept gegeven hoe de speciale oplossing p_n gevonden kan worden. Vaak lukt het een geschikte p_n te vinden door een functie te proberen die op $f(n)$ lijkt.

Een voorbeeld van een inhomogene recurrente betrekking van de 1e orde die we later zullen tegenkomen is,

$$(8.7) \quad a_n = 2a_{n-1} + 3^{n-1}.$$

Als specifieke oplossing van de inhomogene betrekking proberen we $p_n = K \cdot 3^n$. Dan moet voor K gelden:

$$K \cdot 3^n = 2K \cdot 3^{n-1} + 3^{n-1}, \quad \text{d.w.z. } K = 1.$$

Dus $p_n = 3^n$ is een speciale oplossing. De homogene betrekking $a_n = 2a_{n-1}$ heeft als algemene oplossing $a_n = K_1 2^n$. Dus de algemene oplossing van (8.7) is:

$$a_n = 3^n + K_1 2^n.$$

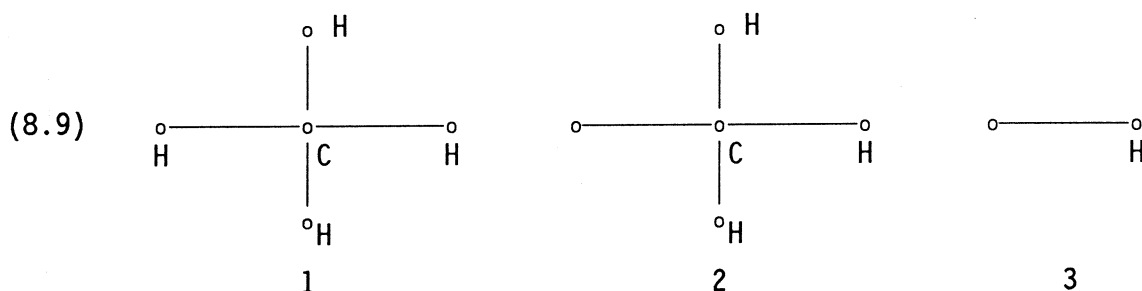
Organische moleculen kunnen als grafen gerepresenteerd worden met de atomen als knooppunten en de bindingen als takken. Tot de eenvoudigste moleculen behoren de koolwaterstoffen $C_k H_{2k+2}$, waarin de k koolwaterstoffen knooppunten van de graad 4 en de $2k+2$ waterstofatomen de graad 1 hebben.

8.8 STELLING

De graaf corresponderend met een koolwaterstof $C_k H_{2k+2}$ is een boom.

BEWIJS:

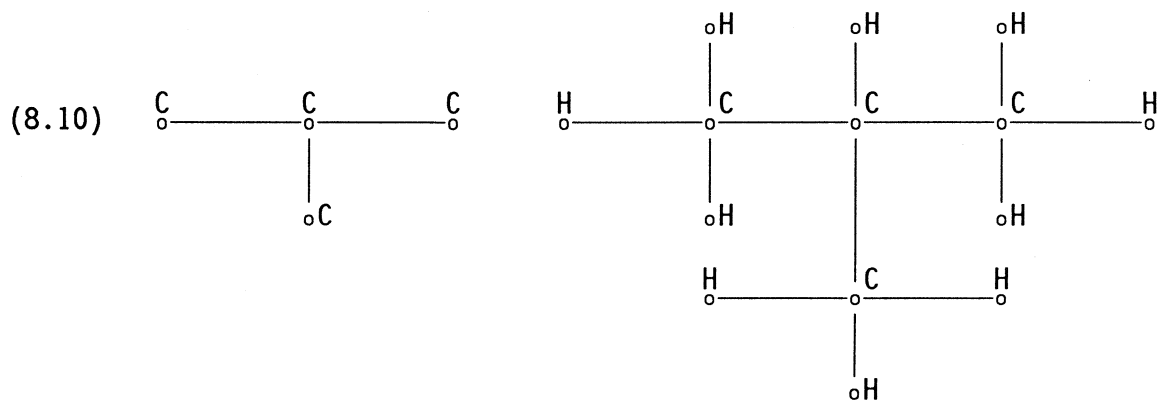
Met volledige inductie naar k . Voor $k = 1$ is CH_4 inderdaad als graaf een boom, zie figuur (8.9.1).



Veronderstel nu dat alle koolwaterstoffen $C_j H_{2j+2}$ als graaf een boom zijn voor $j \leq k-1$.

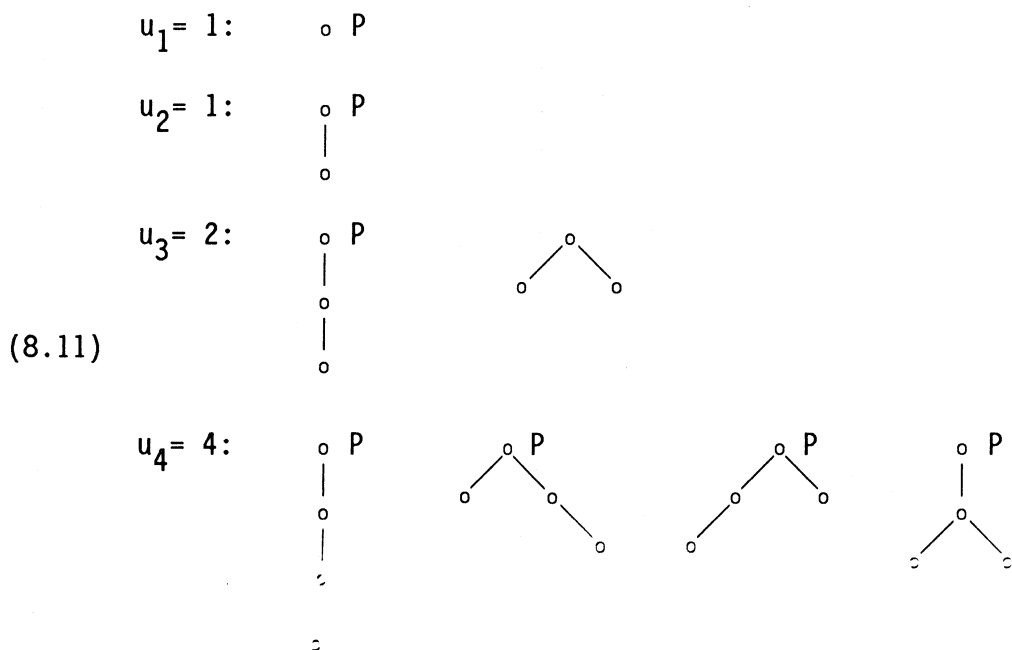
We beschouwen $C_k H_{2k+2}$. De bijbehorende graaf bevat minstens één knooppunt C dat grenst aan drie H-knooppunten (figuur 8.9.2). Vervang dit stuk door figuur (8.9.3). Aldus ontstaat een koolwaterstof $C_{k-1} H_{2(k-1)+2}$, welke volgens de inductieveronderstelling een boom is. Door de oorspronkelijke graaf te herstellen, zien we dat deze ook een boom was. ■

We zijn geïnteresseerd in de isomeren. We kunnen ons daarom beperken tot de voorstelling als graaf waarin alleen de koolwaterstoffen als knooppunten optreden. Dit is uiteraard weer een boom. De configuratie ligt hiermee vast; de waterstofatomen maken de valentie 4 van de koolstofatomen compleet. In figuur (8.10) is dit getekend voor $C_4 H_{10}$.



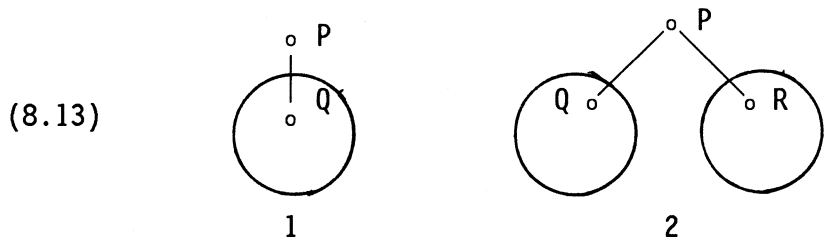
Cayley publiceerde in 1875 het eerste artikel waarin beschreven wordt hoe isomeren m.b.v. de grafentheorie bepaald kunnen worden. Daarbij speelt het aantal verschillende bomen met n knooppunten een belangrijke rol. Wanneer bomen verschillend genoemd worden, hangt af van het specifieke probleem.

Als een voorbeeld voor het oplossen van andere recurrente betrekkingen zullen we gaan tellen het aantal verschillende bomen die een wortel P met graad hoogstens 2 hebben en waarvan de graad van ieder knooppunt hoogstens 3 is. Zeg het aantal van deze bomen met n knooppunten is u_n . Ook om aan te geven welke bomen we als verschillend blijven beschouwen, tekenen we de bomen voor $n = 1, 2, 3$ en 4 .



Bij n knooppunten, zij s_n het aantal bomen met wortel P van de graad één en zij d_n het aantal met wortel P van de graad twee. Het is duidelijk dat,

$$(8.12) \quad u_n = s_n + d_n \quad (n \geq 2)$$



Een boom die bijdraagt tot s_{n+1} is van de vorm als in figuur (8.13.1) met in de cirkel een boom met wortel Q. Dus

(8.14)
$$s_{n+1} = u_n.$$

Een boom die bijdraagt tot d_{n+1} is van de vorm als in figuur (8.13.2), met in de linkercirkel een boom met wortel Q en zeg r knooppunten en in de rechtercirkel een boom met wortel R en n-r knooppunten, waarbij r de waarden 1, 2, ..., n-1 kan aannemen. Dus

(8.15)
$$d_{n+1} = u_1 u_{n-1} + u_2 u_{n-2} + \dots + u_{n-1} u_1.$$

De relaties (8.12), (8.14) en (8.15) geven de recurrente betrekking

(8.16)
$$u_n = u_{n-1} + (u_1 u_{n-2} + u_2 u_{n-3} + \dots + u_{n-2} u_1) \quad (n \geq 3).$$

We zullen deze recurrente betrekking met behulp van voortbrengende functies oplossen. Zij:

$$u(x) = u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \dots ;$$

$$s(x) = s_1 x + s_2 x^2 + s_3 x^3 + \dots ;$$

$$d(x) = d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + \dots .$$

Door relatie (8.12) links en rechts te vermenigvuldigen met x^n en op te tellen voor $n \geq 2$, vinden we

$$\sum_{n=2}^{\infty} u_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} s_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} d_n x^n.$$

Met $u_1 = 1$ en $s_1 = 0$ en $d_1 = 0$ volgt hieruit,

(8.17)
$$u(x) - x = s(x) + d(x).$$

Uit de relatie $s_{n+1} = u_n$, $n \geq 1$ volgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^{n+1} .$$

Waaruit, met $s_1 = 0$,

(8.18)
$$s(x) = x u(x).$$

Uit (8.15) volgt,

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} d_{n+1} x^{n+1} &= x \sum_{n=2}^{\infty} (u_1 u_{n-1} + u_2 u_{n-2} + \dots + u_{n-1} u_1) x^n \\ &= x (u_1 x + u_2 x^2 + \dots) (u_1 x + u_2 x^2 + \dots) \\ &= x \{u(x)\}^2, \end{aligned}$$

waaruit met $d_1 = d_2 = 0$ volgt:

$$(8.19) \quad d(x) = x \{u(x)\}^2.$$

De relaties (8.17), (8.18) en (8.19) tezamen geven,

$$u(x) = x + x \cdot u(x) + x \{u(x)\}^2$$

ofwel,

$$x \{u(x)\}^2 + (x-1) \cdot u(x) + x = 0.$$

Bij vaste x is dit een kwadratische vergelijking in $u(x)$. Lossen we deze kwadratische vergelijking op, dan vinden we:

$$(8.20) \quad u(x) = \frac{1}{2x} [1 - x \pm \sqrt{\{1 - (2x + 3x^2)\}}].$$

Omdat $u(0) = 0$ moet de min-wortel worden gekozen.

Gebruikmakend van de reeksontwikkeling,

$$(1-y)^a = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{a}{k} (-y)^k \quad \text{met} \quad \binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!}$$

vinden we met substitutie van $a = \frac{1}{2}$ en $y = 2x + 3x^2$ dat:

$$u(x) = \frac{1}{2x} \left\{ -x - \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-2x-3x^2)^k \right\}$$

$$\text{Omdat } \binom{1/2}{k} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) \dots (-k+\frac{3}{2})}{k!} = \frac{(-1)^{k-1} (2k-3)!}{2^k \cdot k! \cdot 2 \cdot 4 \dots (2k-4)} = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-2}} \cdot \frac{(2k-3)!}{k!(k-2)!}$$

en

$$(-2x-3x^2)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-2x)^{k-j} (-3x^2)^j = (-2x)^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{3}{2}\right)^j x^j$$

kunnen we schrijven

$$u(x) = \frac{1}{2x} \left\{ \frac{3}{2} x^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-3)!}{2^{2k-2} k! (k-2)!} x^k \left[\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{3}{2}\right)^j \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{2x} \left\{ \frac{3}{2}x^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{(2k-3)!}{k!(k-2)!} \cdot \frac{1}{2^{k-2}} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^j x^{k+j} \right\}.$$

Door n voor $k+j$ te substitueren en de sommaties te verwisselen krijgen we

$$u(x) = \frac{1}{2x} \left\{ 2x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left[\sum_{k=\frac{1}{2}n}^n \binom{k}{n-k} \frac{(2k-3)!}{k!(k-2)!} \frac{3^{n-k}}{2^{n-2}} \right] x^n \right\}$$

$$= x + \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{k=\frac{1}{2}n}^n \binom{k}{n-k} \frac{(2k-3)!}{k!(k-2)!} \frac{3^{n-k}}{2^{n-1}} x^{n-1},$$

waarbij voor oneven waarden van n de sommatie begint bij het eerste gehele getal groter dan $\frac{1}{2}n$, dus bij $\frac{1}{2}(n+1)$.

Dus: $u_1 = 1$

$$u_{n-1} = \sum_{k=\frac{1}{2}n}^n \binom{k}{n-k} \frac{(2k-3)!}{k!(k-2)!} \cdot \frac{3^{n-k}}{2^{n-1}} \quad n \geq 3.$$

Er zijn 4^n rijen van n getallen uit $\{0,1,2,3\}$, zoals 0032, 0123, etc. Hoeveel rijen zijn er met een oneven aantal nullen erin?

Als een ander voorbeeld van voortbrengende functies zullen we dit berekenen. Zeg een willekeurige rij van n getallen bestaat uit d_0 nullen, d_1 enen, d_2 tweeën en d_3 drieën met d_0 oneven en $d_0+d_1+d_2+d_3 = n$. Bij gegeven aantallen d_0, d_1, d_2, d_3 hoeveel verschillende rijen zijn hiermee te maken? Er zijn $n!$ permutaties van een rij, echter een permutatie zal geen verschillende rij opleveren als alleen de nullen onderling gepermuteerd worden, zo ook met de enen, tweeën en drieën. Er zijn dus $\frac{n!}{d_0!d_1!d_2!d_3!}$ verschillende rijen met d_0 nullen, d_1 enen, d_2 tweeën en d_3 drieën. Het gevraagde aantal rijen is dus

$$(8.21) \quad \sum_{\substack{d_0+d_1+d_2+d_3=n \\ d_0 \text{ oneven}}} \frac{n!}{d_0!d_1!d_2!d_3!}$$

Om een eenvoudiger formule te berekenen, beschouwen we het product

$$(8.22) \quad \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \right) \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \right)$$

De coëfficiënt van x^n is precies $1/n!$ maal het getal gegeven door de sommatie in uitdrukking (8.21). Het product van de machtreeksen in (8.22) kan geschreven worden als

$$\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right) (\exp x)^3 = \frac{1}{2} [\exp(x) - \exp(-x)] \cdot \exp(3x) = \frac{1}{2} [\exp(4x) - \exp(2x)]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n - 2^n}{n!} \cdot x^n.$$

Hieruit volgt dat het aantal rijtjes van n cijfers uit $\{0,1,2,3\}$ met een oneven aantal nullen gelijk is aan $\frac{1}{2}(4^n - 2^n)$.

Als een laatste voorbeeld voor het gebruik van voortbrengende functies beschouwen we de partities van een natuurlijk getal. Iedere schrijfwijze van het natuurlijk getal n als som van een aantal natuurlijke getallen noemen we een partitie van n .

Bijvoorbeeld de 7 partities van 5 zijn:

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

We nemen n dus ook als partitie van n .

Laat $p(n)$ aanduiden het aantal partities van n , dus $p(5) = 7$.

Zij $f(x)$ de voortbrengende functie van de getallen $p(1), p(2), p(3), \dots$

We beschouwen,

$$(1-x)^{-1} (1-x^2)^{-1} (1-x^3)^{-1} \dots = (1+x+x^2+\dots)(1+x^2+x^4+\dots)(1+x^3+x^6+\dots) \dots$$

De term x^n in het product kunnen we verkrijgen door uit de i^e factor x^{ia_i} te kiezen met $1a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = n$. Dit correspondeert met de partitie van n bestaande uit a_1 enen, a_2 tweeen etc. Dus de coëfficiënt van x^n is precies $p(n)$.

Hiermee hebben we gevonden dat de voortbrengende functie van de rij $p(1), p(2), p(3), \dots$ gegeven wordt door:

$$f(x) = (1-x)^{-1} (1-x^2)^{-1} (1-x^3)^{-1} \dots$$

Impliciet hebben we hiermee de rij $p(n)$ bepaald. Door $f(x)$ n -maal te differentieren en dan $x = 0$ te substitueren vinden we $n!p(n)$.

Recurrente betrekkingen zijn ook belangrijk bij de analyse van algoritmen. Als voorbeeld zullen we twee sorteer algoritmen behandelen. We gaan uit van n registers x_1, x_2, \dots, x_n waarin n getallen zijn opgeslagen. In ieder register is één getal opgeslagen, de inhoud van het register noemen we dat. Met het sorteren van de n getallen, bedoelen we een verwisseling van de inhouden van de registers zdd. de inhouden van de registers x_1, x_2, \dots, x_n een niet-dalende

rij getallen vormen. Een sorteer algoritme bestaat uit een aantal elementaire operaties. Zo'n elementaire operatie is de vergelijking van de registers x_i en x_j ($i < j$) en het plaatsen van de kleinste inhoud in x_i en de grootste in x_j . We duiden deze elementaire vergelijking aan met $A(x_i, x_j)$.

Het eerste algoritme wordt wel de "bubble-sort" procedure genoemd.

Zij $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de aanduiding voor een procedure die het kleinste getal vindt van de inhouden uit x_1, \dots, x_n en dat in x_1 plaatst.

Zij $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de aanduiding voor de bubble-sort procedure, toegepast op de registers x_1, \dots, x_n .

De procedure S wordt gedefinieerd door de recurrente betrekking

$$S(x_1, x_2, \dots, x_n) = M(x_1, x_2, \dots, x_n) S(x_2, x_3, \dots, x_n).$$

In woorden, eerst wordt het kleinste der inhouden in register x_1 gedaan en daarna wordt de sorteerprocedure toegepast op de inhouden der registers x_2, x_3, \dots, x_n .

De procedure M wordt gedefinieerd door

$$(8.24) \quad M(x_1, x_2, \dots, x_n) = A(x_{n-1}, x_n) A(x_{n-2}, x_{n-1}) \dots A(x_2, x_3) A(x_1, x_2).$$

In woorden, het kleinste der inhouden van x_{n-1} en x_n komt in x_{n-1} , daarna wordt het kleinste der inhouden van x_{n-1} en x_{n-2} in x_{n-2} gedaan, etc., met als resultaat dat het kleinste der getallen opborrelt ("bubble") naar het eerste register.

Laten we het aantal elementaire operaties voor n registers, zeg a_n , berekenen. $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bestaat uit $(n-1)$ elementaire operaties. Uit de recurrente betrekking (8.24) volgt,

$$(8.25) \quad a_n = (n-1) + a_{n-1} \quad (n \geq 3).$$

De randvoorwaarde voor de bubble-sort procedure is

$$S(x_{n-1}, x_n) = A(x_{n-1}, x_n).$$

Waaruit volgt: $a_2 = 1$. De oplossing is direct te zien, nl.

$$(8.26) \quad a_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Het tweede sorteer algoritme heet de Bose-Nelson procedure. De procedure toegepast op de registers x_1, x_2, \dots, x_n duiden we aan met $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Om de beschrijving te vereenvoudigen nemen we aan dat n een macht van 2 is. Laat $P[(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n})]$ een procedure zijn die de getallen in al die registers sorteert, indien zowel de getallen in de registers x_1, x_2, \dots, x_n gesorteerd zijn, alsook de getallen in de registers $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}$. Dan wordt T gedefinieerd door de recurrente betrekking

$$(8.27) \quad T(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = T(x_1, x_2, \dots, x_n) T(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}) \\ P[(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n})].$$

In woorden, de registers x_1, \dots, x_n worden gesorteerd en de registers x_{n+1}, \dots, x_{2n} worden gesorteerd en daarna wordt de procedure P toegepast. De procedure P kan recursief gedefinieerd worden door:

$$(8.28) \quad P[(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n})] \\ = P[(x_1, x_2, \dots, x_{n/2}), (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{3n/2})] \\ P[(x_{n/2+1}, x_{n/2+2}, \dots, x_n), (x_{3n/2+1}, x_{3n/2+2}, \dots, x_{2n})] \\ P[(x_{n/2+1}, x_{n/2+2}, \dots, x_n), (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{3n/2})]$$

$P[(x_1, x_2, \dots, x_{n/2}), (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{3n/2})]$ plaatst de kleinste $n/2$ getallen onder alle inhouden in de registers $x_1, x_2, \dots, x_{n/2}$ in de juiste volgorde.

$P[(x_{n/2+1}, x_{n/2+2}, \dots, x_n), (x_{3n/2+1}, x_{3n/2+2}, \dots, x_{2n})]$ zet de grootste $n/2$ getallen onder alle inhouden in de registers $x_{3n/2+1}, x_{3n/2+2}, \dots, x_{2n}$ in de juiste volgorde.

Daarna plaatst $P[(x_{n/2+1}, x_{n/2+2}, \dots, x_n), (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{3n/2})]$ de n getallen die niet tot de $n/2$ grootste of tot de $n/2$ kleinste behoren in het juiste register.

Zoals hierboven al gezegd, nemen we aan dat $n = 2^r$. De randvoorwaarden voor de recurrente betrekkingen (8.27) en (8.28) zijn:

$$T(x_i, x_j) = A(x_i, x_j) \quad \text{en} \quad P[(x_i), (x_j)] = A(x_i, x_j).$$

Laten we een volledige specificatie uitwerken voor $T(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = T(x_1, x_2) T(x_3, x_4) P[(x_1, x_2), (x_3, x_4)]$$

met

$$T(x_1, x_2) = A(x_1, x_2) \quad \text{en} \quad T(x_3, x_4) = A(x_3, x_4)$$

en

$$P[(x_1, x_2), (x_3, x_4)] = P[(x_1), (x_3)]P[(x_2), (x_4)]P[(x_2), (x_3)] \\ = A(x_1, x_3)A(x_2, x_4)A(x_2, x_3) .$$

Aldus vinden we:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(x_1, x_2)A(x_3, x_4)A(x_1, x_3)A(x_2, x_4)A(x_2, x_3) .$$

Laat c_r aanduiden het aantal elementaire operaties in de procedure

$$P[(x_1, x_2, \dots, x_{2^{r-1}}), (x_{2^{r-1}+1}, x_{2^{r-1}+2}, \dots, x_{2^r})] .$$

Uit (8.28) volgt dat $c_r = 3c_{r-1}$. Met de randvoorwaarde $c_1 = 1$ volgt: $c_r = 3^{r-1}$.

Laat d_r aanduiden het aantal elementaire operaties in de procedure

$T(x_1, x_2, \dots, x_{2^r})$. Uit (8.27) volgt:

$$d_r = 2d_{r-1} + c_r = 2d_{r-1} + 3^{r-1} .$$

We hebben in (8.7) afgeleid dat de algemene oplossing hiervan is:

$$d_r = 3^r + K 2^r .$$

Met de randvoorwaarde $d_1 = 1$ vinden we dat $K = -1$. Dus:

$$(8.30) \quad d_r = 3^r - 2^r .$$

Vergelijking van (8.26) en (8.30) geeft dat voor $n = 2^r$ de Bose-Nelson procedure efficiënter is (d.w.z. dat minder elementaire operaties worden gebruikt), dan de "bubble-sort" procedure.

Er zijn algoritmen die weer efficiënter zijn dan de Bose-Nelson procedure. De meest efficiënte algoritmen zijn van de orde $n \cdot \log(n)$. Zo'n algoritme is bijv. "merge-sort". Hierbij worden net als bij Bose-Nelson de registers x_1, x_2, \dots, x_{2n} gesorteerd door eerst x_1, x_2, \dots, x_n en dan $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}$ te sorteren. Vervolgens wordt echter niet de procedure P gebruikt, maar wordt de sortering als volgt uitgevoerd: vergelijk x_1 met x_{n+1} en plaats de kleinste, zeg x_1 , in een nieuwe rij voorop; daarna worden x_2 en x_{n+1} vergeleken en wordt de kleinste op plaats 2 gezet, etc. Zo wordt een gesorteerde rij gemaakt in $2n$ stappen.

Zij a_n het aantal elementaire stappen in merge-sort. Dan geldt:

$$\begin{cases} a_{2n} = 2a_n + 2n, & n \geq 2 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

8.31 STELLING.

Zij $a_n \leq d \cdot a_{\lfloor n/d \rfloor} + c \cdot n$, met $d \geq 2$, dan is $a_n \leq c \cdot n \cdot d^{\log(n)} + a_1 n$.

BEWIJS:

We passen inductie toe naar n . Voor $n = 1$ moet gelden: $a_1 \leq 0 + a_1$. Dit klopt. Veronderstel dat de bewering juist is voor waarden kleiner dan n . We kunnen nu schrijven:

$$\begin{aligned} a_n &\leq d \cdot a_{\lfloor n/d \rfloor} + c \cdot n \leq d \cdot [c \cdot \lfloor n/d \rfloor \cdot d^{\log(\lfloor n/d \rfloor)} + a_1 \lfloor n/d \rfloor] + c \cdot n \\ &\leq d \cdot [c \cdot n/d \cdot d^{\log(n/d)} + a_1 n/d] + c \cdot n \\ &= c \cdot n \cdot \{d^{\log(n)} - d^{\log(d)}\} + a_1 n + c \cdot n = c \cdot n \cdot d^{\log(n)} + a_1 n. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

8.32 GEVOLG.

Het aantal elementaire stappen in merge-sort is van de orde $n \cdot \log(n)$.
(Er kan worden aangetoond dat een betere complexiteit niet mogelijk is).

Opgave 1.

Los de volgende recurrente betrekking op:

$$\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, & n \geq 3 \\ a_1 = a_2 = 1. \end{cases}$$

Opgave 2

Los de volgende recurrente betrekking op:

$$\begin{cases} a_n = 4(a_{n-1} - a_{n-2}), & n \geq 3 \\ a_1 = 0, a_2 = 4. \end{cases}$$

Opgave 3

a. Leid een recurrente betrekking af voor de waarde a_n van de $n \times n$ determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

b. Bepaal a door de recurrente betrekking op te lossen.

Opgave 4

a. Leid een recurrente betrekking af voor de waarde a_n van de $n \times n$ determinant

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

b. Bepaal a_n door de recurrente betrekking op te lossen.

Opgave 5

Zij a_n een aantal rijtjes met n cijfers uit $\{0,1,2\}$ zódanig dat een cijfer 1 op de j -de plaats niet gevolgd wordt door een 1 of een 2 op plaats $j+1$, $1 \leq j \leq n-1$.

a. Toon aan dat

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}, & n \geq 3 \\ a_1 = 3, & a_2 = 7 \end{cases}$$

b. Bepaal a_n voor $n \geq 1$.

Opgave 6

Bepaal de oplossing van de recurrente betrekking:

$$\begin{cases} a_n^2 - 5a_{n-1}^2 + 4a_{n-2}^2 = 0, & n \geq 3 \\ a_1 = 4, & a_2 = 13 \end{cases}$$

Opgave 7

Zij a_n het aantal rijtjes van n cijfers uit $\{0,1\}$ waarin geen twee opeenvolgende nullen zijn toegestaan.

a. Toon aan dat

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, & n \geq 3 \\ a_1 = 2, & a_2 = 3 \end{cases}$$

b. Bepaal a_n .

Opgave 8

Zij a_n het aantal rijtjes uit $\{1,2\}$ waarvan de som n is, $n \geq 1$. Bepaal a_n .

Opgave 9

Los de volgende recurrente betrekking op:

$$\begin{cases} a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2^n, & n \geq 3 \\ a_1 = 0, & a_2 = 3 \end{cases}$$

Opgave 10

n ringen van verschillende grootte zijn in toenemende grootte (van boven naar beneden) om een staaf A geplaatst. De bedoeling is de ringen één voor één naar een andere staaf B over te brengen. Er is een derde staaf beschikbaar waar de ringen tijdelijk op kunnen worden geplaatst. Gedurende het hele proces mag op geen enkele staaf ooit een ring op een kleinere ring worden geplaatst.

Is het gestelde probleem oplosbaar en zo ja, hoeveel verplaatsingen zijn minimaal nodig om alle ringen van A naar B over te brengen?

Opgave 11

Laat $a_n = \sum_{k=1}^n k^2$, $n \geq 1$.

- Leid een recurrente betrekking af voor a_n .
- Bepaal a_n .

Opgave 12

Bepaal de oplossing van de recurrente betrekking

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + n^2 - 3, & n \geq 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

Opgave 13

Bepaal de oplossing van de recurrente betrekking

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 3, & n \geq 3 \\ a_1 = 1, & a_2 = 4 \end{cases}$$

Opgave 14

Zij a_n het aantal getallen van n cijfers uit $\{1,2,3,4,5\}$ dat deelbaar is door 3.

a. Toon aan dat a_n voldoet aan de recurrente betrekking

$$\begin{cases} a_n + a_{n-1} = 2 \cdot 5^{n-1}, & n \geq 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

b. Bepaal a_n .

Opgave 15

Los de volgende recurrente betrekking op met de methode van voortbrengende functies:

$$\begin{cases} a_{n+1} - a_n = 3^n, & n \geq 0 \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

Opgave 16

Los de volgende recurrente betrekking op met de methode van voortbrengende functies:

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = n, & n \geq 0 \\ a_0 = 1, a_1 = 2 \end{cases}$$

Opgave 17

Stel we tekenen in het platte vlak n gesloten krommen. Als elk van deze krommen elke andere in precies twee punten snijdt en geen enkel drietal door één punt gaat, in hoeveel gebieden wordt het platte vlak dan door deze krommen verdeeld?

Los dit vraagstuk op door de volgende onderdelen te beantwoorden, waarin a_n het gevraagde aantal gebieden voorstelt.

a. Toon aan dat a_n voldoet aan de recurrente betrekking

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2(n-1), & n \geq 2 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

b. Laat m.b.v. de voortbrengende functie zien dat $a_n = n^2 - n + 2, n \geq 1$.

Opgave 18

Zij $f(x)$ de voortbrengende functie van de Fibonacci getallen gegeven door

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 3, \quad \text{met } a_1 = 1 \text{ en } a_2 = 2 \quad .$$

- Toon aan dat $(1-x-x^2)f(x) = x+x^2$.
- Leid af dat

$$a_n = \sum_{k=0}^{n/2} \binom{n-k}{k} \quad .$$

Opgave 19

Zij a_n het aantal manieren om haakjes te plaatsen bij het vermenigvuldigen van n getallen x_1, x_2, \dots, x_n op een zakrekenmachine.

Dus $a_2 = 1$ en $a_3 = 2$. Neem $a_1 = 1$ (per definitie).

- Bewijs dat $a_n = a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \dots + a_{n-1} a_1$, $n \geq 3$.
- Toon aan dat de voortbrengende functie $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ voldoet aan

$$\{f(x)\}^2 - f(x) + x = 0 \quad .$$

- Leid af dat $a_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$, $n \geq 1$.

Opgave 20

Op hoeveel manieren kan een regelmatige n -hoek in driehoeken worden verdeeld met behulp van diagonalen die elkaar niet snijden?

Opmerking: De knooppunten zijn genummerd en er wordt niet gelet op isomorfie.

Opgave 21

Beschouw $S = \{1, 2, \dots, 15\}$. Hoeveel deelverzamelingen met 4 elementen en zódanig dat er geen opeenvolgende getallen in zitten bevat S ?

- Toon aan dat het probleem equivalent is met het aantal oplossingen van:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 14 ; \quad a_1, a_5 \geq 0 ; \quad a_2, a_3, a_4 \geq 2.$$

- Toon aan dat dit aantal de coëfficiënt van x^{14} is in $x^6(1-x)^{-5}$.
- Bereken deze coëfficiënt.

Opgave 22

Zij a_n het aantal partities van n zódanig dat iedere partitie is opgebouwd uit oneven getallen. Zij b_n het aantal partities van n zódanig dat iedere partitie is opgebouwd uit verschillende getallen.

a. Toon aan dat de voortbrengende functie $f(x)$ van a_n voldoet aan

$$f(x) = (1-x)^{-1}(1-x^3)^{-1}(1-x^5)^{-1}\dots$$

b. Toon aan dat de voortbrengende functie $g(x)$ van b_n voldoet aan

$$g(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots$$

c. Bewijs dat $a_n = b_n$ voor iedere n .

Opgave 23

Toon aan dat $\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$, door de coëfficiënten van x^n in beide leden van de identiteit $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$ gelijk te stellen.

Opgave 24

Zij a_n het aantal manieren waarop 4 personen, die elk éénmaal een dobbelsteen werpen, samen n ogen kunnen gooien.

a. Toon aan dat de voortbrengende functie $f(x)$ van de getallen a_n voldoet aan:

$$f(x) = x^4 \left(\frac{1-x^6}{1-x} \right)^4$$

b. Bereken a_{17} .

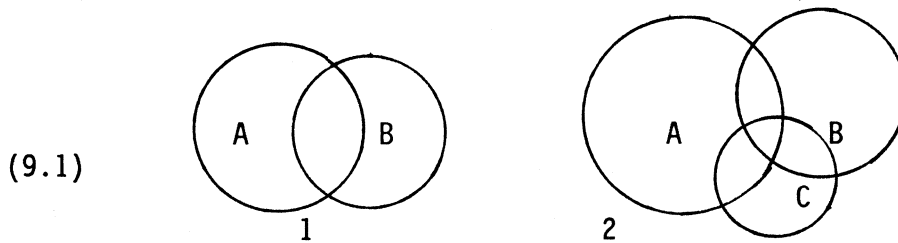
Opgave 25

Zij a_n het aantal partities van n en b_n het aantal partities van n waarin het getal 1 niet voorkomt.

a. Toon aan dat $b_n = a_n - a_{n-1}$, $n \geq 2$

b. Toon aan dat $a_{n+2} + a_n \geq 2a_{n+1}$, $n \geq 1$.

9. Het principe van inclusie en exclusie



Het aantal elementen in een verzameling A duiden we aan met $|A|$.

Het aantal elementen in $A \cup B$ voldoet aan

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Dit is het principe van inclusie en exclusie in zijn eenvoudigste vorm. In $|A|+|B|$ sluiten we teveel elementen in, de elementen van $|A \cap B|$ moeten uitgesloten worden.

Voor drie verzamelingen A, B en C krijgen we

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

Ook deze relatie is een eenvoudig geval van het principe van inclusie en exclusie.

We beschouwen een collectie van objecten met een lijst van r eigenschappen. De objecten kunnen geen, één of meerdere eigenschappen bezitten.

$N(i_1, i_2, \dots, i_k)$ duidt aan het aantal van de objecten die tenminste de eigenschappen i_1, i_2, \dots, i_k bezitten.

In de hierboven beschreven voorbeelden zijn de objecten de elementen en als een element behoort tot de verzameling A dan heeft hij eigenschap 1, als hij behoort tot verzameling B dan heeft hij eigenschap 2, etc.

9.2 STELLING (Principe van inclusie en exclusie).

Het aantal objecten dat tenminste één der eigenschappen bezit is gelijk aan

$$(9.3) \quad \begin{aligned} & \{N(1) + N(2) + N(3) + \dots + N(r)\} - \\ & \{N(1,2) + N(1,3) + \dots + N(1,r) + N(2,3) + \dots + N(r-1,r)\} + \\ & \{N(1,2,3) + N(1,2,4) + \dots + N(r-2,r-1,r)\} - \\ & \quad \vdots \\ & + (-1)^{r-1} N(1,2,\dots,r). \end{aligned}$$

BEWIJS:

Indien een object geen der r eigenschappen bezit, dan wordt het ook nergens meegeteld. Indien een object $t \geq 1$ eigenschappen heeft, zeg de eigenschappen $1, 2, \dots, t$, dan moet de bijdrage in bovenstaande uitdrukking 1 zijn.

De bijdrage in $\{N(1) + N(2) + N(3) + \dots + N(r)\}$ is t , ofwel $\binom{t}{1}$.

Uit t eigenschappen zijn $\binom{t}{2}$ combinaties van 2 eigenschappen te vormen, de bijdrage in $\{N(1,2) + N(1,3) + \dots + N(1,r) + N(2,3) + \dots + N(r-1,r)\}$ wordt dus $\binom{t}{2}$. Uit t eigenschappen zijn $\binom{t}{k}$ combinaties van k eigenschappen te vormen. De bijdrage wordt dus in totaal:

$$t - \binom{t}{2} + \binom{t}{3} - \binom{t}{4} + \dots + (-1)^{t+1} \binom{t}{t} =$$

$$1 - \left\{ 1 - \binom{t}{1} + \binom{t}{2} + \dots + (-1)^t \binom{t}{t} \right\} = 1 - (1 - 1)^t = 1 \quad \blacksquare$$

Het aantal van de objecten die geen der r eigenschappen bezitten, vinden we door van het totale aantal objecten de expressie (9.3) af te trekken. Dit wordt wel de zeefformule genoemd.

9.4 Voorbeeld

Een permutatie van objecten, waarbij geen der objecten op zijn plaats blijft heet een dérangement. We zullen nu m.b.v. het principe van inclusie en exclusie een formule afleiden voor het aantal dérangementen van n voorwerpen. Daartoe definiëren we als verzameling objecten de verzameling van alle permutaties, dat zijn er $n!$

Een object bezit de eigenschap i indien geldt dat het i -de symbool op de i -plaats staat. Het aantal dérangementen is dan juist het aantal objecten dat geen der eigenschappen 1 tot en met n bezit.

Met gebruikmaking van de notatie van 9.2 vinden we dat $N(i) = (n-1)!$, immers: het i -de symbool blijft op zijn plaats terwijl de andere gepermuteerd worden. Zo geldt: $N(i,j) = (n-2)!$, immers dan blijven de symbolen i en j op hun plaats. $N(i,j,k) = (n-3)!$, enz.

Het aantal termen van het type $N(i)$ in (9.3) is $\binom{n}{1}$, het aantal $N(i,j)$'s is $\binom{n}{2}$, etc.

Stelling 9.2 geeft dus als formule voor het aantal permutaties waarbij minstens één der elementen op zijn plaats blijft:

$$(n-1)! \binom{n}{1} - (n-2)! \binom{n}{2} + (n-3)! \binom{n}{3} - \dots + (-1)^{n-1} (n-n)! \binom{n}{n}.$$

Het aantal dérangementen is $n!$ minus dit aantal , d.w.z.

$$n! - \frac{(n-1)! n!}{(n-1)! 1!} + \frac{(n-2)! n!}{(n-2)! 2!} - \frac{(n-3)! n!}{(n-3)! 3!} - \dots + (-1)^n (n-n)! \binom{n}{n} =$$

$$(9.5) \quad n! \left\{ 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right\} = n! e^{-1}.$$

Dit probleem komt men in de literatuur tegen onder de naam: problème des rencontres (1708 Montmort).

Een permutatie van n objecten kan gerepresenteerd worden door n schaakstukken op een n bij n "schaakbord" te plaatsen. Indien het i -de object op de j -de plaats staat dan zetten we een schaakstuk op het veld van de i -de rij en de j -de kolom. Als voorbeeld is de permutatie 2413 in figuur (9.6) getekend.

(9.6)

		P	
P			
			P
	P		

Het is duidelijk dat een plaatsing van n stukken op een $n \times n$ bord pas dan correspondeert met een permutatie indien geen twee stukken in één rij of in één kolom staan. Een plaatsing is een dérangement indien op de hoofddiagonaal (van links boven naar rechts onder) geen stukken staan.

Het aantal dérangementen van n objecten is dus gelijk aan het aantal manieren waarop n torens op een $n \times n$ schaakbord geplaatst worden zdd. zij elkaar niet slaan en er geen toren op de hoofddiagonaal staat.

Zij C een bord van willekeurige vorm met m velden. Voor $k \leq m$ laat $r_k(C)$ aanduiden het aantal manieren waarop k niet-slaags-rakende torens op C geplaatst kunnen worden.

De voortbrengende functie is:

$$R(x,C) = r_0(C) + r_1(C) x + r_2(C) x^2 + \dots + r_m(C) x^m.$$

We noemen deze functie de torenveelterm voor het bord C .

9.7 Voorbeeld.

We berekenen de torenveelterm voor het gewone 4×4 bord. Daartoe moeten we bepalen de getallen $r_i(C)$, $i=0,1,\dots,16$.

Het is duidelijk dat $r_i(C) = 0$ voor $i > 4$, $r_0(C) = 1$ en $r_1(C) = 16$.

Bij twee torens moeten we 2 rijen uit de 4 kiezen, dit kan op $\binom{4}{2}$

verschillende manieren. Als de rijen gekozen zijn, dan kunnen we de eerste toren in ieder van de 4 velden plaatsen, er blijven dan 3 velden over voor de andere toren. Dus $r_2(C) = \binom{4}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 72$.

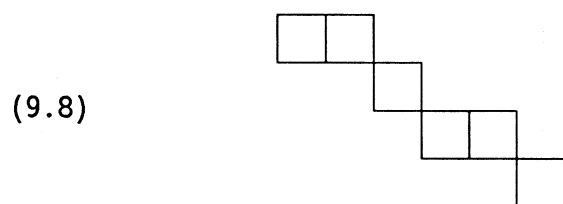
Analoog berekenen we,

$$r_3(C) = \binom{4}{3} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96 \quad \text{en} \quad r_4(C) = \binom{4}{4} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Dus:

$$R(x,C) = 1 + 16x + 72x^2 + 96x^3 + 24x^4.$$

Twee gedeelten van een bord C, zeg A en B noemen we niet-interfererend indien geen veld van A in dezelfde rij of kolom ligt als een veld van B. Het bord van figuur (9.8) bestaat uit vier niet-interfererende gedeelten.



Eigenschap 1. Indien een bord C bestaat uit twee niet-interfererende gedeelten A en B dan is de torenveelterm voor C gelijk aan het product van de torenveeltermen voor A en voor B.

Bewijs:

Indien k niet-slaags-rakende torens op het bord C geplaatst zijn, dan staan er t op A en (k-t) op B, voor een t met $0 \leq t \leq k$.

Daar een toren op A nooit slaags raakt met een toren op B, geldt er

$$r_k(C) = r_0(A)r_k(B) + r_1(A)r_{k-1}(B) + \dots + r_k(A)r_0(B).$$

De expressie in het rechterlid is de coëfficiënt van x^k in het product,

$$\{r_0(A) + r_1(A)x + r_2(A)x^2 + \dots\} \cdot \{r_0(B) + r_1(B)x + r_2(B)x^2 + \dots\},$$

d.w.z. het product van de torenveeltermen voor A en voor B. ■

Eigenschap 2. Voor bord C kiezen we een veld v. Zij D het bord dat uit C ontstaat door alle velden uit de rij en uit de kolom waarin v ligt, weg te laten. Zij E het bord dat uit C ontstaat door het veld v weg te laten. Dan geldt voor de torenveeltermen: $R(x,C) = x \cdot R(x,D) + R(x,E)$.

Bewijs:

Indien k niet-slaags-rakende torens op het bord C geplaatst zijn, dan is vld v bezet of niet bezet. Als het bezet is, dan zijn er (k-1) torens op het bord D geplaatst, dit kan op $r_{k-1}(D)$ manieren.

Als het veld niet bezet is, dan zijn er k torens op het bord E geplaatst, dit kan op $r_k(E)$ manieren. Dus,

$$r_k(C) = r_{k-1}(D) + r_k(E) \quad (k \geq 1)$$

Waaruit volgt:

$$R(x,C) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k(C)x^k = \sum_{k=1}^{\infty} r_{k-1}(D)x^k + \sum_{k=1}^{\infty} r_k(E)x^k + r_0(C) = x R(x,D) + R(x,E)$$

want $r_0(C) = r_0(E) = 1$.

9.9 Voorbeeld. We bepalen de torenveelterm van het getekende bord C .



$$R(x,C) = x \cdot R(\square \square) + R\left[\begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \square \end{array} \right] = x(1 + 2x) + R\left[\begin{array}{cc} \square & \square \end{array} \right] R(\square) = x(1 + 2x) + (1 + 4x + 2x^2)(1 + x) = 1 + 6x + 8x^2 + 2x^3 .$$

We zagen dat het dérangement correspondeerde met een plaatsing van niet-slaags-rakende torens op een bord zdd. er geen torens op de hoofddiagonaal staan. De hoofddiagonaal vormt het bord van de verboden velden voor dérangementen.

9.11 STELLING

Het aantal permutaties van n symbolen z.d.d. geen veld van een bord C van verboden velden bezet wordt, is gelijk aan,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k (n-k)! r_k ,$$

met r_k het aantal manieren om k niet-slaags-rakende torens op het bord C te plaatsen.

BEWIJS:

We gebruiken het principe van inclusie en exclusie. De objecten zijn permutaties, een object heeft de i -de eigenschap als het i -de symbool zich op een verboden veld bevindt. Het aantal permutaties met geen symbool op C is, in de notatie van 9.2,

$$n! - \{N(1) + \dots + N(n)\} + \{N(1,2) + \dots + N(n-1,n)\} - \dots + (-1)^n N(1,2,\dots,n)$$

Zij s_i het aantal verboden velden in de i -de rij. Het i -de symbool kan dan op s_i manieren op een verboden veld geplaatst worden.

Gecombineerd met de $(n-1)!$ permutaties van de andere symbolen, vinden we dat $N(i) = s_i(n-1)!$ Met $s_1 + \dots + s_n = r_1$, volgt nu:

$$N(1) + \dots + N(n) = (n-1)! (s_1 + \dots + s_n) = (n-1) r_1.$$

Iedere plaatsing van twee torens op het bord C kan door een willekeurige permutaties van de overige $(n-2)$ torens tot een plaatsing van n symbolen uitgebreid worden. In zo'n plaatsing zijn minstens 2 verboden velden bezet. Dus,

$$N(1,2) + \dots + N(n-1,n) = (n-2)!r_2.$$

Dezelfde argumentatie gaat op voor termen met $3 \leq k \leq n$. ■

9.12 Voorbeeld. Een bedrijfsleider moet 5 opdrachten toewijzen aan 5 kandidaten. De kandidaten duiden we aan met A, B, C, D en E en de opdrachten worden genoteerd met a, b, c, d en e. Kandidaat A is ongeschikt voor de opdrachten b en c, kandidaat B is ongeschikt voor a en c, C is ongeschikt voor b, d en e, D is geschikt voor alle opdrachten en E is ongeschikt voor d.

Op hoeveel manieren kunnen de opdrachten toegewezen worden?

In figuur (9.13) is een 5 x 5 bord getekend, de met * gemerkte velden zijn verboden.

(9.13)

A		*	*		
B	*		*		
C		*		*	*
D					
E				*	
	a	b	c	d	e

Om stelling (9.11) toe te passen, moeten we de torenveelterm van het bord van verboden velden bepalen.

$$\begin{aligned}
 R\left[\begin{array}{ccccc} \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \end{array}\right] &= xR\left[\begin{array}{ccccc} \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \end{array}\right] + R\left[\begin{array}{ccccc} \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \end{array}\right] \\
 &= x\{xR(\square) + R[\square\square]\} + R(\square)R[\square\square\square] \\
 &= x\{x(1+x) + 1 + 3x + 2x^2\} + (1+x)\{xR[\square\square] + R[\square\square\square]\} \\
 &= x(1 + 4x + 3x^2) + (1+x)\{x(1 + 3x + x^2) + (1+x)R[\square\square]\} \\
 &= (x + 4x^2 + 3x^3) + (1+x)\{x + 3x^2 + x^3 + (1+x)(1 + 4x + 3x^2)\} \\
 &= 1 + 8x + 20x^2 + 17x^3 + 4x^4.
 \end{aligned}$$

Hieruit vinden we: $r_0 = 1$, $r_1 = 8$, $r_2 = 20$, $r_3 = 17$, $r_4 = 4$.

Het aantal manieren waarop de opdrachten toegewezen kunnen worden is dus:

$$5! - 4! \cdot 8 + 3! \cdot 20 - 2! \cdot 17 + 1! \cdot 4 = 18.$$

9.13 Voorbeeld. (problème des ménages)

Hoeveel tafelschikkingen zijn er voor n echtparen aan een ronde tafel, zdd. voor iedereen de burens van de andere sexe zijn en bovendien geen man naast zijn eigen vrouw zit.

De vrouwen kunnen op $(n-1)!$ manieren plaatsnemen. De toegelaten permutaties der n mannen is zoals figuur (9.14) voor $n = 6$ aangeeft.

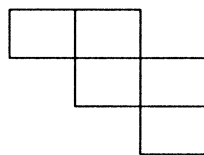
(9.14)

plaats ↓	1	*	*				
2			*	*			
3					*	*	
4						*	*
5							*
6	*						*
man →		1	2	3	4	5	6

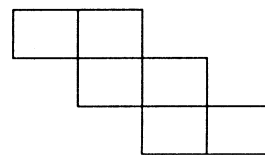
Veronderstel dat de vrouwen in de volgorde $1, 2, \dots, n$ zitten. Voor de mannen resteren de plaatsen 1 (tussen de eerste en tweede vrouw) tot en met plaats n (tussen de n -de en de eerste vrouw).

Zij $R_n(x)$ de torenveelterm voor het bord van verboden velden.

Zij $L_k(x)$ de torenveelterm voor borden van de getekende vorm met k velden:



k oneven



k even

Dan geldt:

$$(9.15) \quad R_n(x) = L_{2n-1}(x) + xL_{2n-3}(x).$$

De $L_k(x)$ voldoen aan de recurrente betrekking

$$L_k(x) = L_{k-1}(x) + xL_{k-2}(x) \quad k \geq 2$$

met als randvoorwaarden $L_0(x) = 1$ en $L_1(x) = 1+x$.

Ga na (zie opgave 13) dat de oplossing is: $L_k(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \binom{k-m+1}{m} x^m$. Substitueren we dit in (9.15) dan vinden we:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \sum_{m=0}^n \binom{2n-m}{m} x^m + \sum_{m=0}^{n-1} \binom{2n-m-2}{m} x^{m+1} = 1 + \sum_{m=1}^n \left\{ \binom{2n-m}{m} + \binom{2n-m-1}{m-1} \right\} x^m \\ &= \sum_{m=0}^n \frac{2n}{2n-m} \binom{2n-m}{m} x^m. \end{aligned}$$

In de notatie van stelling (9.11) geldt nu: $r_k = \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k}$.

Het aantal toegelaten permutaties van de mannen is volgens stelling (9.11):

$$(9.16) \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)! , \quad n \geq 2 .$$

Het aantal tafelschikkingen vinden we door dit aantal nog met $(n-1)!$ (het aantal permutaties van de vrouwen) te vermenigvuldigen.

Opgave 1

Bepaal het aantal natuurlijke getallen uit $\{1,2,\dots,1000\}$ dat niet deelbaar is door 3, noch door 7, noch door 11.

Opgave 2

Hoeveel permutaties van de getallen $1,2,\dots,8$ zijn er waarin geen van de patronen 12,34,56 en 78 voorkomt?

Opgave 3

Beschouw de vergelijking

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18 \\ 0 \leq x_i \leq 7 \text{ en } x_i \text{ geheel} , \quad 1 \leq i \leq 4 \end{cases} .$$

- Bepaal het aantal oplossingen met behulp van voortbrengende functies.
- Bepaal het aantal oplossingen met het principe van inclusie en exclusie.

Opgave 4

Laat $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ en $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ met $m \geq n$.

Toon aan dat het aantal functies van A op B gelijk is aan: $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^m$.

Opgave 5

Bepaal het aantal getallen van $n \geq 3$ cijfers in het 4-tallig stelsel, waarin elk van de cijfers 1,2 en 3 minstens één keer optreedt.

Opgave 6

Beschouw de volgende uitleenprocedure. Tien boeken worden over tien kinderen verdeeld, zodat elk kind één boek krijgt. Daarna worden de boeken weer ingenomen en opnieuw over de kinderen verdeeld, op zodanige wijze dat elk kind een ander boek krijgt dan de eerste keer. Op hoeveel manieren kan deze procedure uitgevoerd worden?

Opgave 7

Op hoeveel manieren kunnen de letters a,a,a,a,b,b,b,c,c worden gerangschikt, zodat gelijke letters niet allemaal achter elkaar staan?

Opgave 8

5n Personen zijn afkomstig uit n landen, uit elk land komen 5 personen. De 5n personen worden op een rij gezet, zódanig dat iedereen naast een landgenoot staat.

Toon aan dat dit kan op

$$(120)^n \left\{ (2n)! - \binom{n}{1} (2n-1)! + \binom{n}{2} (2n-2)! + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} n! \right\}$$

manieren.

Opgave 9

De Eulerfunctie $\phi(n)$ van het positieve gehele getal n is het aantal gehele getallen k zodat $0 < k \leq n$ en k en n onderling ondeelbaar zijn. Bewijs dat

$$\phi(n) = n \prod_{p \geq 2} \left(1 - \frac{1}{p} \right),$$

waarbij het product wordt genomen over alle delers van n die priemgetallen zijn.

Opgave 10

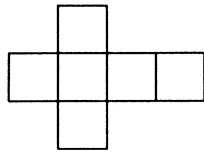
Beschouw het aantal permutaties van de getallen 1 t/m n waarin geen enkele i direct gevolgd wordt door i+1, $1 \leq i \leq n-1$.

Toon aan dat dit aantal gelijk is aan $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (n-k)! (-1)^k$.

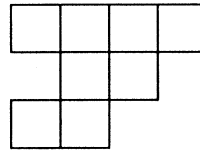
Opgave 11

Bepaal de torenveelterm van de volgende borden:

a.



b.



Opgave 12

Bewijs dat de torenveelterm $R_{n,m}(x)$ van een rechthoekig $n \times m$ bord voldoet aan de recurrentie betrekking $R_{n,m}(x) = R_{n-1,m}(x) + mx R_{n-1,m-1}(x)$.

Opgave 13

Zij $\{L_k(x)\}$ een rij polynomen gedefiniëerd door

$$L_0(x) = 1, L_1(x) = 1+x, L_k(x) = L_{k-1}(x) + xL_{k-2}(x), k \geq 2.$$

Laat $a_{k,m}$ de coëfficiënt van x^m zijn in $L_k(x)$.

a. Bewijs dat $a_{k,m} = a_{k-1,m} + a_{k-2,m-1}$, $k \geq 2$ ($a_{i,-1} = 0$ voor alle i).

b. Bewijs dat $a_{k,m} = \binom{k-m+1}{m}$, $k \geq 2$.

Opgave 14

Een huwelijksbureau heeft 5 mannelijke en 5 vrouwelijke cliënten: A,B,C,D,E respectievelijke a,b,c,d,e.

Na onderzoek van deze personen komt men tot de conclusie dat a niet past bij A en B, b niet bij B, c niet bij D, d niet bij C en E en dat e niet past bij C en E.

Op hoeveel verschillende manieren kunnen de vrouwelijke cliënten aan de mannelijke cliënten worden gekoppeld?

Opgave 15

Een taxibedrijf beschikt over 5 taxi's en heeft 5 chauffeurs in dienst.

De eerste chauffeur wil niet rijden in taxi's 1 en 2.

De tweede chauffeur wil niet rijden in de taxi's 3 en 4.

De derde chauffeur wil niet rijden in taxi 5.

De vierde chauffeur wil niet rijden in de taxi's 3 en 5.

De vijfde chauffeur wil niet rijden in taxi 4.

Op hoeveel verschillende manieren kunnen de chauffeurs over de taxi's worden verdeeld terwijl er tevens aan hun eisen wordt voldaan?

Opgave 16

Vijf heren (Albert, Bernard, Cees, Dick en Emile) en vijf dames (Fien, Gertie, Hendrike, Ingelise en Josine) hebben ingeschreven voor een tennistoernooi. Dit toernooi is een gemengd-dubbel toernooi, d.w.z. dat iedere heer met één der dames een combinatie vormt. De damens mochten ten hoogste twee heren opgeven met wie ze niet wensten te spelen. Deze wensen zijn als volgt:

Fien wil niet spelen met Albert of Emile, Gertie niet met Cees of Dick, Hendrike niet met Albert of Emile, Ingelise niet met Bernard en Josine niet met Cees.

- a. Op hoeveel verschillende manieren kunnen er 5 combinaties worden gevormd, waarbij rekening wordt gehouden met de wensen der dames?
- b. Neem aan dat door loting de 5 combinaties worden gevormd. Hierbij heeft ieder van de toegestane mogelijkheden een gelijke kans om geloot te worden. Wat is de kans dat Albert en Josine een combinatie vormen?

III. ENUMERATIE

Literatuur

Harary, F.: "Graph Theory", Addison Wesley, 1969.

Liu, C.L.: "Introduction to combinatorial mathematics", McGraw-Hill, 1968.

Tucker, A.: "Applied combinatorics", Wiley, 1980.

10. Het tellen van grafen; multinomiaalcoëfficiënten

Arthur Cayley, één van de grondleggers van de grafentheorie, raakte geïnteresseerd in het tellen van verschillende bomen. Hij vond een toepassing van zijn resultaten in het bepalen van aantallen isomeren voor chemische samenstellingen (zie paragraaf 8).

De enumeratie van grafen heeft twee categoriën:

1. Het tellen van het aantal verschillende grafen van een bepaald type, bijvoorbeeld alle samenhangende normale grafen met acht knooppunten.
2. Het tellen van de deelgrafen van een bepaald type voor een gegeven paragraaf G , bijvoorbeeld alle deelgrafen van G die een boom zijn.

Bij de problemen van de 2e categorie wordt gewoonlijk de berekening gedaan via de structuurmatrix. Hoewel problemen van dit type vaak in toepassingen voorkomen, zullen we in dit college geen problemen van het 2e type behandelen. In de categorie 1 spraken we van "verschillende" grafen. Bij het tellen moeten we precies aangeven wat we onder verschillend zullen verstaan.

Indien we grafen tellen waarvan de knooppunten genummerd zijn, dan beschouwen we de knooppunten als verschillend en tellen we ook isomorfe grafen als verschillend. In andere gevallen zullen we alleen niet-isomorfe grafen als verschillend beschouwen.

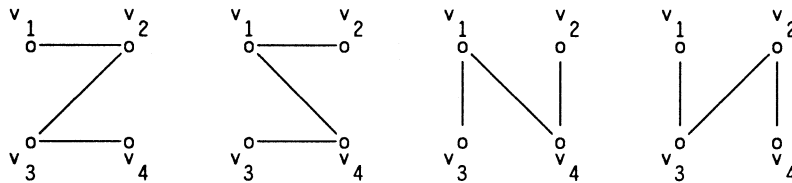
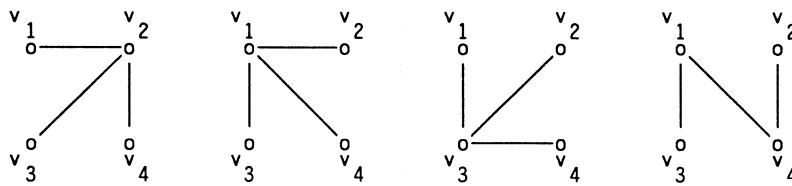
Bijvoorbeeld het aantal grafen met n knooppunten en m takken. Indien de knooppunten als verschillend beschouwd worden dan zijn er $\frac{1}{2}n(n-1)$ verschillende paren van knooppunten. We kunnen uit deze paren er m kiezen en die paren tot paren van aangrenzende knooppunten maken. Dit kan op

$$(10.1) \quad \left[\begin{matrix} \frac{1}{2}n(n-1) \\ m \end{matrix} \right]$$

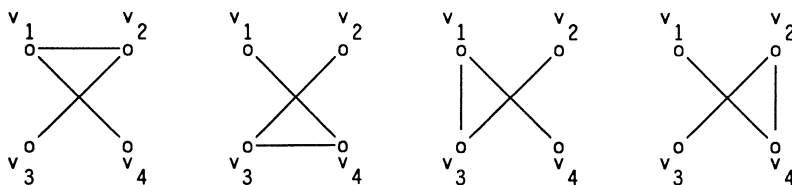
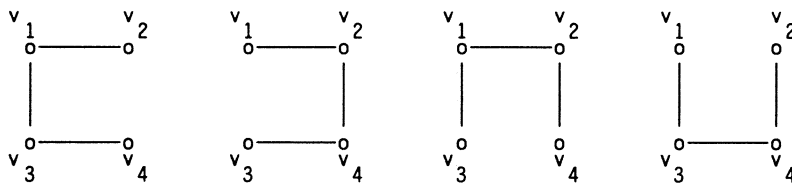
manieren. Dit aantal is dus het aantal verschillende grafen met genummerde knooppunten en m takken. Onder deze grafen zijn er vele die isomorf zijn,

d.w.z. als we de nummering van knooppunten weglaten dan zijn ze dezelfde graaf. Het aantal niet-isomorfe grafen is dus veel kleiner dan het aantal van (10.1).

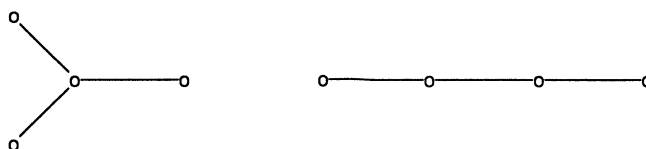
Isomorfie is een equivalentie-relatie. Het aantal niet-isomorfe grafen is dus gelijk aan het aantal equivalentieklassen van de isomorfie-relatie. Bijvoorbeeld: er zijn 16 verschillende bomen met genummerde knooppunten (zie figuur 10.2). Onder deze bomen zijn maar 2 niet-isomorfe grafen (zie figuur (10.3)). De vier bomen van de bovenste rij zijn isomorf met de eerste boom in (10.3), de overige 12 zijn isomorf met de tweede boom in (10.3).



(10.2)



(10.3)



In deze paragraaf zullen we grafen tellen met genummerde knooppunten.

10.4 STELLING

Het aantal normale grafen met n genummerde knooppunten is $2^{\frac{1}{2}n(n-1)}$.

1e BEWIJS:

Er zijn $\frac{1}{2}n(n-1)$ verschillende paren knooppunten. Een paar knooppunten kan wel dan niet verbonden zijn door een tak. Iedere graaf is dus te representeren door een rij met $\frac{1}{2}n(n-1)$ getallen die 0 (geen tak) of 1 (wel een tak) kunnen zijn. Het aantal grafen is dus gelijk aan het aantal m -rijen van nullen en éenen met $m = \frac{1}{2}n(n-1)$. Dit aantal is $2^{n(n-1)/2}$.

2e BEWIJS:

We zagen in (10.1) dat het aantal grafen met n knooppunten en m takken gelijk is aan $\binom{\frac{1}{2}n(n-1)}{m}$. Het totale aantal grafen vinden we hieruit door te sommeren van $m = 0$ tot $m = \frac{1}{2}n(n-1)$. Met het binomium van Newton vinden we dan:

$$\sum_{m=0}^{\frac{1}{2}n(n-1)} \binom{\frac{1}{2}n(n-1)}{m} = 2^{\frac{1}{2}n(n-1)} \quad \blacksquare$$

Om bomen met genummerde knooppunten te kunnen tellen, zullen we het zogenaamde multinomium afleiden.

We definiëren de multinomiaalcoëfficiënten $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_p}$ met n, n_1, \dots, n_p niet-negatieve gehele getallen waarvoor $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$ door:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_p} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_p!}$$

Omdat het bij sommaties gemakkelijk is, spreken we af dat

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_p} = 0 \quad \text{als } n_1 + n_2 + \dots + n_p \neq n.$$

10.5 STELLING

Het aantal mogelijkheden om n objecten in p dozen D_1, \dots, D_p te doen, zdd. doos D_i precies n_i objecten bevat is gelijk aan $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_p}$.

BEWIJS:

Indien $n_1 + n_2 + \dots + n_p \neq n$ dan is een opdeling met n_i in doos D_i niet mogelijk. Het aantal mogelijkheden is dan nul, evenals de multinomiaalcoëfficiënt. Laten we nu aannemen dat $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$.

Er zijn $\binom{n}{n_1}$ combinaties van n_1 uit n voorwerpen. Dus het aantal mogelijkheden doos D_1 te vullen is $\binom{n}{n_1}$. Na het vullen van doos D_1 blijven er $n-n_1$ objecten over. Hieruit kunnen we $\binom{n-n_1}{n_2}$ combinaties van n_2 objecten kiezen om doos D_2 te vullen. Het aantal mogelijkheden voor doos D_3 is dan $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$, etc.

Het totale aantal is dus: $\binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2} \cdot \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdots \binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{p-1}}{n_p} =$

$$\frac{n!}{(n-n_1)!n_1!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!n_2!} \cdot \frac{(n-n_1-n_2)!}{(n-n_1-n_2-n_3)!n_3!} \cdots \frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_p)!}{(n-n_1-n_2-\cdots-n_p)!n_p!} =$$

$$0! = 1$$

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_p!} = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_p}.$$

■

10.6 STELLING

Indien $(x_1+x_2+\cdots+x_p)^n$ uitvermenigvuldigd wordt, dan is de coëfficiënt van $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_p^{n_p}$ gelijk aan $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_p}$.

BEWIJS:

We beschouwen het product $(x_1+x_2+\cdots+x_p)(x_1+x_2+\cdots+x_p)\cdots(x_1+x_2+\cdots+x_p)$, in totaal n factoren.

Een term $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_p^{n_p}$ verkrijgen we door n_1 maal x_1 als term uit een factor te kiezen, n_2 maal als term x_2 te kiezen, etc.

Het kiezen van term x_i uit zekere factor kunnen we "representeren" door te zeggen: de factor wordt in doos D_i gedaan. Het kiezen der termen komt dan overeen met het opdelen van n factoren over p dozen zdd. er n_1 in doos D_1 , n_2 in doos D_2 , ..., n_p in doos D_p zijn. Dit kan op $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_p}$ manieren. ■

10.7 STELLING (multinomial)

$$(x_1+x_2+\cdots+x_p)^n = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_p} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_p} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_p^{n_p}.$$

BEWIJS:

We bewezen in stelling 10.6 dat de coëfficiënt van $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_p^{n_p}$ gelijk is aan $\binom{n}{n_1, \dots, n_p}$. Door onze conventie om de multinomialcoëfficiënt nul te stellen als $n_1+\cdots+n_p \neq n$ kunnen we sommeren over alle p -rijen van niet-negatieve getallen n_1, n_2, \dots, n_p . ■

Het multinomium is een generalisatie van het binomium. Door in het multinomium $p = 2$ te stellen vinden we het binomium terug. In stelling 7.3 vonden we een belangrijke relatie voor de binomiaal coëfficiënt. In de notatie voor multinomiaalcoëfficiënten luidt deze:

$$(10.8) \quad \binom{n}{n_1, n_2} = \binom{n-1}{n_1-1, n_2} + \binom{n-1}{n_1, n_2-1}.$$

Voor het geval $n_1 = 0$ is deze relatie niet correct, maar dan kunnen we schrijven $\binom{n}{0, n} = \binom{n-1}{0, n-1}$. Zo ook voor $n_2 = 0$. Door $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_p}$ nul te stellen als één van de getallen n_1, n_2, \dots, n_p gelijk is aan -1 , kunnen we voor alle gevallen de relatie (10.8) laten gelden. De generalisatie voor multinomiaal coëfficiënten wordt gegeven in de volgende stelling.

10.9 STELLING

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_p} = \binom{n-1}{n_1-1, n_2, \dots, n_p} + \binom{n-1}{n_1, n_2-1, n_3, \dots, n_p} + \dots + \binom{n-1}{n_1, \dots, n_{p-1}, n_p-1}.$$

1e BEWIJS:

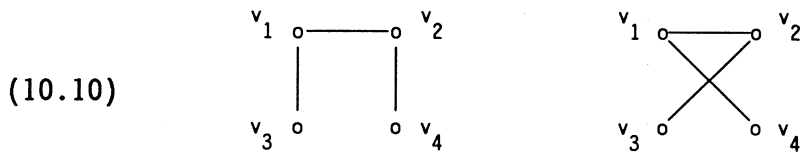
$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_p}$ is het aantal manieren om objecten over p dozen te verdelen zdd. er n_i in Doos D_i komen, $i=1, \dots, p$. Het n -de object moet daarbij in één der p -dozen terecht komen. Als het in de 1e doos zit, dan moeten de overige $(n-1)$ objecten over de p dozen verdeeld worden zdd. er n_1-1 in Doos D_1 zijn, n_2 in doos D_2, \dots , etc. Dit kan op $\binom{n-1}{n_1-1, n_2, \dots, n_p}$ manieren. Als het n -de object in de 2e doos gedaan wordt, dan vinden we een aantal $\binom{n-1}{n_1, n_2-1, n_3, \dots, n_p}$, etc.

2e BEWIJS:

De multinomiaalcoëfficiënt $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_p}$ is de coëfficiënt van $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_p^{n_p}$ in de ontwikkeling van $(x_1 + \dots + x_p)^n$.

Laten we nu beschouwen $(x_1 + x_2 + \dots + x_p)(x_1 + x_2 + \dots + x_p)^{n-1}$. De term $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_p^{n_p}$ kunnen we verkrijgen door uit de 1e factor x_1 te kiezen en uit de 2e factor $x_1^{n_1-1} x_2^{n_2} \dots x_p^{n_p}$. Dit kan op $\binom{n-1}{n_1-1, n_2, \dots, n_p}$ manieren. De term $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_p^{n_p}$ kunnen we ook verkrijgen door uit de 1e factor x_2 te kiezen en uit de 2e factor $x_1^{n_1} x_2^{n_2-1} x_3^{n_3} \dots x_p^{n_p}$. Dit kan op $\binom{n-1}{n_1, n_2-1, n_3, \dots, n_p}$ manieren, etc. ■

We gaan nu tellen het aantal bomen met genummerde knooppunten, zeg v_1, v_2, \dots, v_n zdd. de graden van de knooppunten gelijk zijn aan d_1 resp. $d_2, \dots, \text{resp. } d_n$. Bijvoorbeeld, het aantal bomen met knooppunten v_1, \dots, v_4 en graden $\delta(v_1) = \delta(v_2) = 2, \delta(v_3) = \delta(v_4) = 1$, is gelijk aan 2. Ze zijn getekend in figuur (10.10). Merk op dat ze isomorf zijn.



10.11 STELLING

Het aantal bomen met genummerde knooppunten v_1, v_2, \dots, v_n zdd. $\delta(v_1) = d_1, \delta(v_2) = d_2, \dots, \delta(v_n) = d_n$ is gelijk aan

$$(10.12) \quad \left[d_1 - 1, d_2 - 1, \dots, d_n - 1 \right]^{n-2}.$$

BEWIJS:

Het bewijs gaat met volledige inductie naar n . Voor $n = 2$ geldt dat er maar één boom is en daarvoor geldt dat $d_1 = d_2 = 1$.

Bij $n = 2$ is ook de uitdrukking (10.12) alleen ongelijk aan nul indien $d_1 = d_2 = 1$ en $\left[1 - 1, 1 - 1 \right]^{2-2} = 1$.

Volgens de inductie aanname mogen we nu veronderstellen dat het aantal bomen met knooppunten v_1, v_2, \dots, v_k en $\delta(v_1) = d_1, \delta(v_2) = d_2, \dots, \delta(v_k) = d_k$ gelijk is aan $\left[d_1 - 1, d_2 - 1, \dots, d_k - 1 \right]^{k-2}$.

We zullen nu bewijzen dat de uitspraak van de stelling ook geldt voor $n = k+1$ en willekeurige getallen d_1, d_2, \dots, d_{k+1} .

In stelling 5.2 bewezen we dat het aantal takken in een boom met $k+1$ knooppunten gelijk is aan k . De som van de graden is dus gelijk aan $2k$. Indien $d_1 + d_2 + \dots + d_{k+1} \neq 2k$ dan is het aantal bomen dus gelijk aan nul. Maar dan geldt ook dat: $(d_1 - 1) + (d_2 - 1) + \dots + (d_{k+1} - 1) \neq 2k - (k+1) = k-1$.

Volgens afspraak is dan ook $\left[d_1 - 1, d_2 - 1, \dots, d_{k+1} - 1 \right]^{(k+1)-2} = 0$.

Laten we nu aannemen dat $d_1+d_2+\dots+d_{k+1} = 2k$ en alle d 's ≥ 1 . Minstens twee d 's moeten gelijk aan één zijn. Door henummering van de knooppunten kunnen we er altijd voor zorgen dat $d_{k+1} = 1$, d.w.z. het knooppunt v_{k+1} is een eindpunt. Het knooppunt v_{k+1} moet verbonden zijn met precies één van de overige knooppunten v_1, v_2, \dots, v_k . Indien v_{k+1} verbonden is met v_1 en we laten v_{k+1} weg, dan ontstaat een boom met knooppunten v_1, \dots, v_k en $\delta(v_1) = d_1 - 1$, $\delta(v_2) = d_2$, ..., $\delta(v_k) = d_k$.

Volgens de inductie aanname zijn er

$$(10.13) \quad \left[\binom{k-2}{(d_1-1)-1, d_2-1, \dots, d_k-1} \right]$$

van zulke bomen. Het aantal bomen met v_{k+1} verbonden met v_1 en $\delta(v_1) = d_1$, ..., $\delta(v_{k+1}) = d_{k+1}$ is dus gelijk aan (10.13).

Om het aantal bomen te bepalen zdd. v_{k+1} met v_2 verbonden is, tellen we het aantal bomen met v_1, \dots, v_k en $\delta(v_1) = d_1$, $\delta(v_2) = d_2 - 1$, $\delta(v_3) = d_3$, ..., $\delta(v_k) = d_k$. Volgens de inductie aanname is dit aantal gelijk aan

$$\left[\binom{k-2}{d_1-1, d_2-2, d_3-1, \dots, d_k-1} \right].$$

Analoge uitdrukkingen gelden als v_{k+1} verbonden is met v_3, v_4, \dots, v_k .

Het totale aantal is de som

$$\left[\binom{k-2}{d_1-2, d_2-1, \dots, d_k-1} \right] + \left[\binom{k-2}{d_1-1, d_2-2, d_3-1, \dots, d_k-1} \right] + \dots + \left[\binom{k-2}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_{k-1}-1, d_k-2} \right]$$

Volgens stelling 10.9 is dezesom gelijk aan: $\left[\binom{k-1}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_k-1} \right]$.

Daar $d_{k+1} = 1$ en dus $(d_{k+1}-1)! = 1$ kunnen we voor deze multinomiaal coëfficiënt ook schrijven

$$\frac{(k-1)!}{(d_1-1)!(d_2-1)! \dots (d_k-1)!(d_{k+1}-1)!} = \left[\binom{(k+1)-2}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_{k+1}-1} \right]. \quad \blacksquare$$

De bekendste stelling in de enumeratie van genummerde grafen is de volgende stelling die afkomstig is van Cayley.

10.14 STELLING

Het aantal bomen met genummerde knooppunten v_1, \dots, v_n is gelijk aan n^{n-2} .

BEWIJS:

We gebruiken de stelling 10.11. Het aantal bomen waarvoor geldt $\delta(v_1) = d_1, \dots, \delta(v_k) = d_k$ is $\binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_n-1}$. Het totale aantal bomen vinden we door deze multinomiaalcoëfficiënten te sommeren over alle n -rijen van natuurlijke getallen d_1, \dots, d_n , d.w.z.

$$(10.15) \quad \sum_{d_1, d_2, \dots, d_n} \binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_n-1}.$$

Uit stelling 10.7 volgt voor p en n te substitueren n resp. $n-2$, en met $x_i = 1$ voor $1 \leq i \leq p$:

$$(10.16) \quad (1 + 1 + \dots + 1)^{n-2} = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_n} \binom{n-2}{m_1, m_2, \dots, m_n} 1^{m_1} 1^{m_2} \dots 1^{m_n}.$$

De som in het rechterlid van (10.10) is gelijk aan de som in (10.15). Het aantal bomen is dus gelijk aan n^{n-2} . ■

10.17 Voorbeeld.

Het aantal bomen met knooppunten v_1, v_2, v_3, v_4 is volgens stelling 10.14 gelijk aan $4^2 = 16$. In figuur 10.2 zijn ze getekend. Voor een boom met $\delta(v_1) = d_1, \delta(v_2) = d_2, \delta(v_3) = d_3$ en $\delta(v_4) = d_4$ moet gelden dat $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 6$.

De partities van 6 met 4 getallen zijn $3 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 + 1$.

De 4-rijen van d_1, d_2, d_3, d_4 waarbij bomen behoren, zijn dus

$$(10.18) \quad 3, 1, 1, 1 ; 1, 3, 1, 1 ; 1, 1, 3, 1 ; 1, 1, 1, 3$$

en de 6 rijen

$$(10.19) \quad 2, 2, 1, 1 ; 2, 1, 2, 1 ; 2, 1, 1, 2 ; 1, 2, 2, 1 ; 1, 2, 1, 2 ; 1, 1, 2, 2 .$$

Het aantal bomen bij $3, 1, 1, 1$ is volgens stelling (10.11) gelijk aan $\binom{2}{2, 0, 0, 0} = 1$. Zo ook voor de andere rijen in (10.18). Tezamen geven ze dus 4 bomen. Het aantal bomen bij $2, 2, 1, 1$ is $\binom{2}{1, 1, 0, 0} = 2$. Ook voor andere rijen is het aantal bomen gelijk aan 2. Tezamen geven de rijen van (10.19) dus 12 bomen. Alle rijen tezamen geven dus $4 + 12 = 16$ bomen.

Opgave 1

Toon het volgende aan: de getallen $d_1, d_2, \dots, d_n \geq 1$ zijn de graden van de knooppunten van een boom dan en slechts dan als $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$.

Opgave 2

- Hoeveel verschillende normale grafen met 5 genummerde knooppunten en 4 takken zijn er?
- Hoeveel van deze grafen bevatten een kring bestaande uit 3 takken?
- Hoeveel van deze grafen bevatten een kring bestaande uit 4 takken?
- Hoeveel van deze grafen zijn een boom?

Opgave 3

Toon analoog aan voorbeeld 10.17 aan dat er 125 bomen met 5 genummerde knooppunten zijn.

Opgave 4

Bewijs dat het aantal verschillende bomen met knooppunten v_1, v_2, \dots, v_n en met $d_1 = \delta(v_1) = k$ gelijk is aan $\binom{n-2}{k-1} (n-1)^{n-1-k}$.

Opgave 5

Bewijs dat $2(n-1)n^{n-2} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k(n-k)T(k)T(n-k)$, waarbij $T(k)$ het aantal verschillende bomen is met k genummerde knooppunten.

Opgave 6

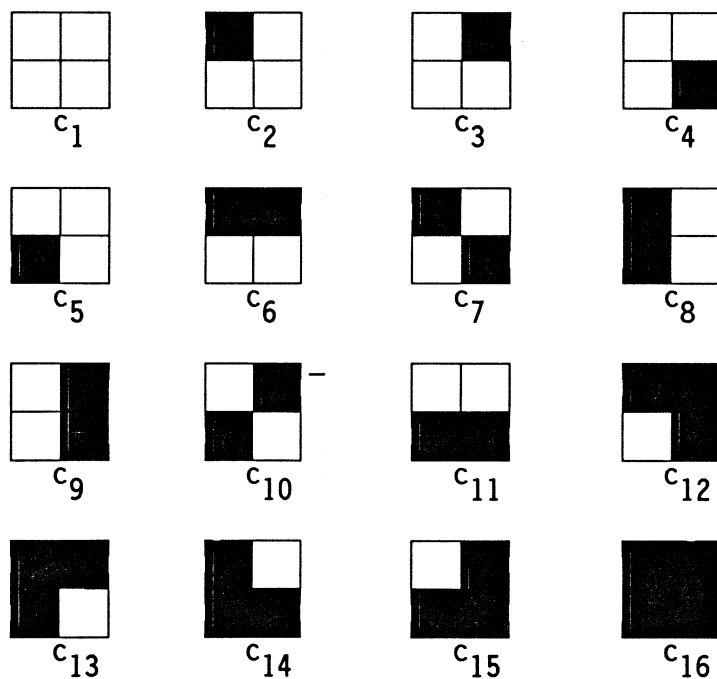
Zij $T(n,p)$ het aantal grafen met genummerde knooppunten v_1, v_2, \dots, v_n bestaande uit p disjunctie bomen zodat v_i behoort tot de i -de boom, $1 \leq i \leq p$. Toon met behulp van opgave 4 aan dat $T(n,p) = pn^{n-p-1}$.

11. De stelling van Burnside

In figuur 11.1 zijn 2 x 2 schaakborden getekend met witte en zwarte velden. Er zijn 2^4 van deze schaakborden. Echter, als de vier zijden niet van elkaar te onderscheiden zijn, dan zijn er schaakborden die niet te onderscheiden zijn. Door te roteren over $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ gaan de borden c_2, c_3, c_4 en c_5 in elkaar over. Ook de borden c_6, c_8, c_9 en c_{11} zijn onder rotatie hetzelfde, zo ook de borden c_{12}, c_{13}, c_{14} en c_{15} en de borden c_7 en c_{10} . Borden die door rotatie in elkaar overgaan noemen we equivalent. Onder de 16 borden zijn er dus maar 6 niet-equivalente.

Indien we niet geïnteresseerd zijn in zwart-wit patronen maar in contrast-patronen, dan worden c_1 en c_{16} ook equivalent, zo ook c_2 en c_{15} , etc. Er zijn maar 4 niet-equivalente patronen.

In deze en de volgende paragraaf wordt een theorie ontwikkeld die zich bezig houdt met het tellen van niet-equivalente objecten.



We hebben tot nu toe een permutatie als een rangschikking gezien. Een permutatie kan ook als een 1-1-afbeelding gezien worden. Bijvoorbeeld, de permutatie (b,d,c,a) van de verzameling $S = \{a,b,c,d\}$ zullen we zien als de afbeelding van S naar S met $a \rightarrow b, b \rightarrow d, c \rightarrow c, d \rightarrow a$.

Daartoe noteren we de permutatie door $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & c & a \end{pmatrix}$, of door $(a b d)(c)$.

Laten π_1 en π_2 permutaties zijn van de verzameling S , zeg $\pi_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & d & b & c \end{pmatrix}$ en $\pi_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \end{pmatrix}$. Dan definiëren we de samenstelling $\pi_1\pi_2$ door de afbeelding die we verkrijgen door eerst π_2 toe te passen en daarna π_1 , dus $\pi_1\pi_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$ en $\pi_2\pi_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & a & c \end{pmatrix}$.

We merken op dat deze samenstelling van permutaties een niet-commutatieve operatie is, i.h.a. $\pi_1\pi_2 \neq \pi_2\pi_1$.

Zij $G = \{\pi_1, \pi_2, \dots\}$ een verzameling van permutaties van een zekere verzameling S . We noemen G een permutatiegroep indien G onder de zojuist ingevoerde operatie van samenstelling een groep vormt. D.w.z. G moet dan voldoen aan:

1. $\pi_1, \pi_2 \in G \rightarrow \pi_2\pi_1 \in G$ (gesloten onder de operatie)
2. $(\pi_1\pi_2)\pi_3 = \pi_1(\pi_2\pi_3)$, $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \in G$ (associatief)
3. $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \in G$ (eenheidselement in G)
4. $\pi_1 \in G \rightarrow \exists \pi_2 \in G$ zdd. $\pi_1\pi_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ (inverse in G)

Ga na dat $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} \right\}$ een permutatiegroep is voor $S = \{a, b, c\}$.

Zij G een permutatiegroep voor $S = \{a, b, \dots\}$, We noemen twee elementen van S , zeg a en b , equivalent (onder G) indien er een permutatie in G is die a op b afbeeldt. Ga na dat deze relatie een equivalentie relatie is. De equivalentieclassen noemen we transitiviteitsklassen.

In het voorbeeld van de schaakborden induceert een rotatie van 90° de permutatie

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_1 & c_3 & c_4 & c_5 & c_2 & c_9 & c_{10} & c_6 & c_{11} & c_7 & c_8 & c_{15} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{16} \end{pmatrix}$$

De rotaties van 180° resp. 270° induceren

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_1 & c_4 & c_5 & c_2 & c_3 & c_{11} & c_7 & c_9 & c_8 & c_{10} & c_6 & c_{14} & c_{15} & c_{12} & c_{13} & c_{16} \end{pmatrix}$$

resp.

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_1 & c_5 & c_2 & c_3 & c_4 & c_8 & c_{10} & c_{11} & c_6 & c_7 & c_9 & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{12} & c_{16} \end{pmatrix}.$$

Laat π_4 de identieke permutatie zijn, corresponderend met een rotatie van nul graden. Ga na dat $G = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$ een permutatiegroep is. Het aantal verschillende zwart-wit patronen is gelijk aan het aantal transitiviteitsklassen onder deze groep van permutaties (rotaties).

11.2 STELLING (Burnside)

Het aantal transitiviteitsklassen van de verzameling S onder permutatiegroep G is gelijk aan

$$(11.3) \quad \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} \psi(\pi),$$

met $\psi(\pi)$ het aantal van de elementen van S die invariant zijn onder π .

BEWIJS:

Voor $s \in S$ duiden we aan met $\eta(s)$ het aantal van de permutaties waarvoor s invariant is. Voor het totale aantal invarianties onder alle permutaties kunnen we dan ook schrijven $\sum_{s \in S} \eta(s)$. Dan geldt:

$$(11.4) \quad \sum_{\pi \in G} \psi(\pi) = \sum_{s \in S} \eta(s),$$

want in beide gevallen wordt het totale aantal invarianties onder alle permutaties geteld.

Zij a een willekeurig gekozen element van een willekeurig gekozen transitiviteitsklasse. Alle permutaties van G waarvoor a invariant is, vormen een ondergroep van G (ga dit na). We duiden deze ondergroep aan met $H(a)$. De orde van $H(a)$ is gelijk aan $\eta(a)$. De groep G is op te delen in een eindig aantal linkernevenklassen van H , zeg de nevenklassen $\pi_1 H(a), \pi_2 H(a), \dots, \pi_{m(a)} H(a)$, met π_1 de identiteit. Iedere nevenklasse heeft $\eta(a)$ elementen (ga dit na). Er geldt dus:

$$(11.5) \quad \eta(a) \cdot m(a) = |G|.$$

We willen nu aantonen dat $m(a)$ gelijk is het aantal elementen in de transitiviteitsklasse van a . Neem $b \neq a$ in dezelfde transitiviteitsklasse als a , zeg $b = \pi^*(a)$. Laat $H(a) = \{\pi_1^*, \pi_2^*, \dots, \pi_{\eta(a)}^*\}$. Dan is $\pi^* H(a)$ de linkernevenklasse van $H(a)$ die alle permutaties bevat die a op b afbeelden (ga dit na). Dit geeft een één-éénduidige correspondentie tussen de elementen uit de transitiviteitsklasse van a en de linkerevenklassen van $H(a)$, waaruit volgt:

$$m(a) = \text{aantal elementen in de transitiviteitsklasse van } a.$$

Door optellen van (11.5) over deze transitiviteitsklasse verkrijgen we:

$$\sum_{b \in T(a)} \eta(b) = |G|, \text{ met } T(a) \text{ de transitiviteitsklasse van } a.$$

Maar de transitiviteitsklasse was willekeurig gekozen, dus deze relatie geldt voor iedere transitiviteitsklasse.

Door optelling van alle transitiviteitsklassen verkrijgen we:

$$\sum_{s \in S} \eta(s) = \# \text{ transitiviteitsklasse} \cdot |G|.$$

Met (11.4) volgt hieruit de gelijkheid (11.3). ■

11.6 Voorbeeld. Zij $S = \{a, b, c, d\}$ en G de permutatiegroep met elementen

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \pi_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \end{pmatrix}, \pi_3 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & d & c \end{pmatrix} \text{ en } \pi_4 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}.$$

De equivalentierelatie is getekend in figuur (11.7). Het is duidelijk dat S wordt opgedeeld in twee transitiviteitsklassen, $\{a, b\}$ en $\{c, d\}$.

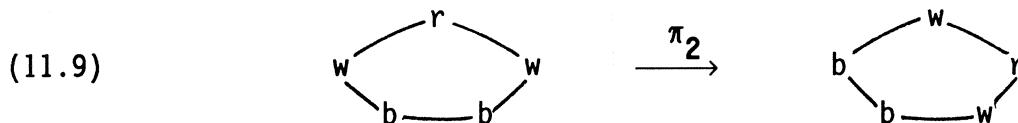
(11.7)

	a	b	c	d
a	*	*		
b	*	*		
c			*	*
d			*	*

Met $\psi(\pi_1) = 4$, $\psi(\pi_2) = 2$, $\psi(\pi_3) = 2$, $\psi(\pi_4) = 0$ vinden we door (11.3) te gebruiken dat het aantal transitiviteitsklassen gelijk is aan $\frac{1}{4}(4+2+2+0) = 2$.

11.8 Voorbeeld. We zoeken het aantal verschillende kettingen bestaande uit 5 kralen die rood, wit of blauw kunnen zijn. Twee kettingen zijn niet-verschillend als de één door rotatie in de andere over te voeren is. Zij S de verzameling van alle kettingen (verschillend en niet-verschillend). S heeft $3^5 = 243$ elementen. Zij $G = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5\}$ de permutatiegroep op S , met π_1 de identieke permutatie, π_2 de permutatie corresponderend met een "rotatie over één kraal in de richting van de wijzers van de klok".

Bijvoorbeeld, π_2 op de linkerketting in (11.9) geeft de rechterketting.



$\pi_3 = \pi_2 \pi_2 =$ "rotatie over twee kralen", $\pi_4 = \pi_2 \pi_2 \pi_2$ en $\pi_5 = \pi_2 \pi_2 \pi_2 \pi_2$.

Het aantal kettingen invariant onder π_1 is 243. Een ketting die invariant is onder π_2 , moet alle kralen van dezelfde kleur hebben. Dus het aantal invariant onder π_2 is 3. Het aantal invariante kettingen onder één van de overige permutaties is ook 3. Het aantal verschillende kettingen is dus volgens (11.3) gelijk aan $\frac{1}{5}(243+3+3+3+3) = 51$.

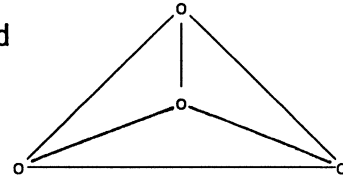
Opgave 1

Op hoeveel verschillende manieren kunnen de hoekpunten van een vierkant met 3 kleuren worden gekleurd, wanneer het vierkant gedraaid en omgeklapt mag worden?

Opgave 2

Op hoeveel manieren kunnen de knooppunten van nevenstaande graaf met twee kleuren worden gekleurd wanneer de figuur vrij kan bewegen in:

- a. twee dimensies.
- b. drie dimensies.



Opgave 3

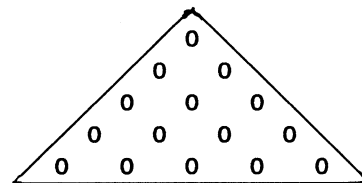
Op hoeveel manieren kunnen de velden van een 3 x 3 schaakbord met twee kleuren worden gekleurd, als het schaakbord gedraaid mag worden?

Opgave 4

Vijftien bollen worden in een driehoek gerangschikt zoals hiernaast getekend.

De driehoek mag gedraaid worden.

Hoeveel rangschikkingen zijn er mogelijk als elke bol rood, wit of blauw wordt gekleurd ?

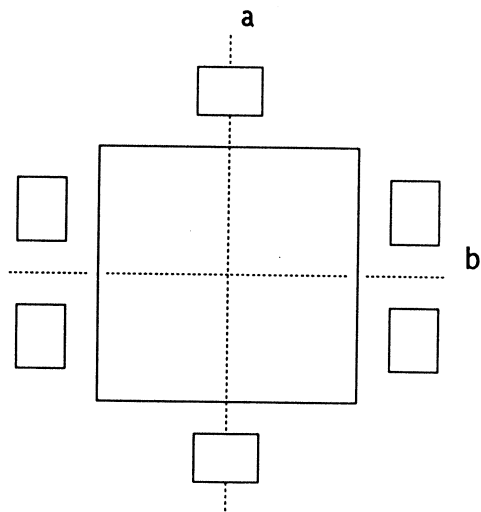


Opgave 5

Beschouw rijtjes van de lengte n bestaande uit blauwe en rode knikkers. Twee rijtjes heten equivalent als de door spiegeling (d.w.z. door van achter naar voren te lopen) uit elkaar ontstaan. Bepaal het aantal verschillende rijtjes.

Opgave 6

Beschouw het aantal manieren waarop 2 studenten en vier stafleden aan de hiernaast getekende vergadertafel kunnen zitten. Van de studenten onderling en van de stafleden onderling nemen we aan dat er geen verschillen zijn en ook noemen we twee opstellingen equivalent als ze in elkaar overgaan via spiegelingen om de in de figuur aangegeven assen a en b. Hoeveel verschillende vergaderopstellingen zijn er?



Opgave 7

Veronderstel dat men een getal van 5 cijfers (getallen kleiner dan 10.000 worden aan de voorzijde aangevuld met nullen) op een klein stukje papier wil schrijven. Als het papier onderste boven wordt gehouden worden de getallen 0,1,6,8,9 gelezen als 0,1,9,8,6 respectievelijk.

Getallen die aldus op twee manieren te lezen zijn (bijv. 89166 en 99168) identificeren we.

- Welke permutatiegroep is in het spel?
- Hoeveel verschillende getallen zijn er?

Opgave 8

Beschouw een regelmatige n -hoek die gedraaid en omgeklapt mag worden.

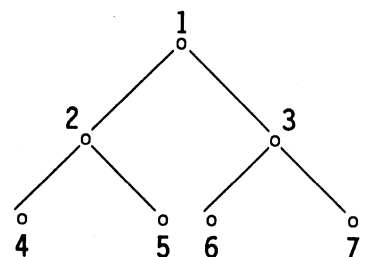
- Geef aan wat de bijbehorende permutatiegroep is.
- Stel dat n een priemgetal is. Op hoeveel verschillende manieren kunnen de hoekpunten dan met twee kleuren worden gekleurd?

Opgave 9

Beschouw de hiernaast getekende boom, waarvan ieder knooppunt wit of zwart gekleurd kan worden.

Twee kleuringen heten equivalent als de een in de ander over te voeren is door verwisseling van linker en rechter deelbomen.

- Geef aan wat de bijbehorende permutatiegroep is.
- Bepaal het aantal verschillende kleuringen.



12. De Theorie van Pólya

Het tellen van de transitiviteitsklassen kan ingewikkeld zijn, ook als de stelling van Burnside wordt toegepast.

Soms zijn we niet alleen geïnteresseerd in het totale aantal niet-equivalente mogelijkheden, maar ook in deelklassen daarvan. Bijvoorbeeld naast het aantal verschillende zwart-wit patronen bij de borden van figuur (11.1) kunnen we ook geïnteresseerd zijn in het aantal verschillende zwart-wit patronen met twee witte en twee zwarte velden.

Deze vragen kunnen beantwoord worden met de stelling van Pólya.

Laten D en R verzamelingen zijn, en beschouw een functie f van D naar R , d.w.z. aan ieder element van D wordt een element van R toegevoegd.

De terminologie van Pólya volgend heten de elementen van D plaatsen, de elementen van R figuren, en de functies heten configuraties.

Zij G een permutatiegroep op D , configuratiegroep geheten.

We noemen de configuraties f_1 en f_2 equivalent (onder G) indien er een permutatie $\pi \in G$ is zdd. $f_1(d) = f_2(\pi(d))$ voor alle $d \in D$.

Deze relatie is inderdaad een equivalentierelatie. De equivalentieklassen noemen we patronen.

12.1 Voorbeeld.

Zij $D = \{a, b, c, d\}$ en $R = \{w, z\}$. Laat G de permutatie groep zijn op D met $G = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$, waarbij

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}, \pi_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}, \pi_3 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix} \text{ en } \pi_4 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

Er zijn $2^4 = 16$ functies van D naar R , ze zijn gegeven in tabel (12.2).

		f(a)	f(b)	f(c)	f(d)		f(a)	f(b)	f(c)	f(d)
(12.2)	f_1	w	w	w	w	f_9	w	z	z	w
	f_2	z	w	w	w	f_{10}	w	z	w	z
	f_3	w	z	w	w	f_{11}	w	w	z	z
	f_4	w	w	z	w	f_{12}	z	z	z	w
	f_5	w	w	w	z	f_{13}	z	z	w	z
	f_6	z	z	w	w	f_{14}	z	w	z	z
	f_7	z	w	z	w	f_{15}	w	z	z	z
	f_8	z	w	w	z	f_{16}	w	z	z	z

We kunnen nu equivalente functies gaan opsporen. Bijvoorbeeld:

$$f_3(\pi_1(a)) = f_3(b) = z = f_2(a) , f_3(\pi_1(b)) = f_3(c) = w = f_2(b) ,$$

$$f_3(\pi_1(c)) = f_3(d) = w = f_2(c) , f_3(\pi_1(d)) = f_3(a) = z = f_2(d) ,$$

dus de functies f_2 en f_3 zijn equivalent.

Ga na dat de 16 functies in de volgende 6 equivalentieclassen zijn verdeeld;

$\{f_1\}$, $\{f_2, f_3, f_4, f_5\}$, $\{f_6, f_8, f_9, f_{11}\}$, $\{f_7, f_{10}\}$, $\{f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{15}\}$ en $\{f_{16}\}$.

We gaan terug naar de 2×2 schaakborden van figuur (11.1). We zullen de 4 velden aangegeven met a, b, c en d en de kleuren wit en zwart met w resp. z.

(12.3)

a	b
d	c

Een functie van $\{a,b,c,d\}$ naar $\{w,z\}$ correspondeert met een schaakbord. De permutaties van

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{bmatrix} \right\} ,$$

corresponderen met rotaties om 90° resp. 180° resp. 270° resp. 0° .

Equivalente functies corresponderen met equivalente zwart-wit patronen. De verschillende equivalentieclassen zijn de verschillende zwart-wit patronen.

We hebben in vorige paragrafen gebruik gemaakt van voortbrengende functies. Dat zullen we hier ook doen.

We hadden tot nu toe meestal een eindige rij van getallen, zeg $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ met een voortbrengende functie $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Deze voortbrengende functie is een polynoom. In het vervolg hebben we ook verzamelingen van getallen die van meerdere parameters afhangen. De voortbrengende functie wordt dan een multinoom.

Voorbeeld. Het multinoom $(x+y+z)^n$ is de voortbrengende functie van de multinomiaalcoëfficiënten $\binom{n}{n_1, n_2, n_3}$.

We beschouwen weer de functies van D naar R . Aan ieder der elementen r voegen we toe een gewicht $w(r)$.

De som van de gewichten over alle figuren wordt de figuur-telreeks genoemd, d.w.z. $\sum_{r \in R} w(r)$. Aan iedere configuratie kennen we een gewicht toe,

n.l. $w(f) = \prod_{d \in D} w(f(d))$. Equivalente configuraties hebben hetzelfde gewicht (ga dit na).

Zij S een willekeurige verz. Onder het gewicht van S , genoteerd als $w(S)$, verstaan we $\sum_{s \in S} w(s)$. Als D k elementen bevat en R p elementen, dan is $(w(R))^k$ het product van k identieke factoren. Volgens stelling 10.7 geldt:

$$(w(R))^k = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_p} \binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_p} w(r_1)^{k_1} w(r_2)^{k_2} \dots w(r_p)^{k_p}.$$

De multinomiaal coëfficiënten geven dus het aantal configuraties met een bepaald gewicht, zonder te letten op equivalentie.

Zij F de verz. van alle configuraties, dan is dus $(w(R))^k = w(F)$. Deze multinoom $w(F)$ heet de configuratie-telreeks.

Voorbeeld. Onze schaakborden zijn afbeeldingen van a, b, c, d naar w, z . We nemen x als het gewicht van w en y als het gewicht van z . De figuur-telreeks is dan $(x+y)$. De configuratie-telreeks is dan $(x+y)^4$. Met behulp van het binonium vinden we bijv. dat er $\binom{4}{2}$ functies met gewicht x^2y^2 (twee witte en zwarte velden) zijn.

De configuratie-telreeks telt teveel, nl. ook equivalente functies. Daarom willen we de patronen-telreeks bepalen. Dit is weer een multinoom met als coëfficiënten het aantal niet-equivalente functies van dat gewicht.

Zij F^* de verz. van alle niet-equivalente functies, dan is de patronen-telreeks dus gelijk aan $w(F^*)$.

Voorbeeld.

De patronen-telreeks van onze schaakborden is $x^4 + x^3y + 2x^2y^2 + xy^3 + y^4$. Als coëfficiënt van x^jy^{4-j} moet immers het aantal niet equivalente borden worden genomen met j witte en $4-j$ zwarte velden.

Een cykel in een permutatie is een deelverzameling van elementen die cyclisch verwisseld worden. Bijvoorbeeld, in de permutatie

$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ c & e & d & a & b & f \end{pmatrix}$ vormt $\{a, c, d\}$ een cykel, immers $a \rightarrow c, c \rightarrow d, d \rightarrow a$.

Zo vormt $\{b, e\}$ een cykel en $\{f\}$ is ook een cykel van deze permutatie. De lengte van een cykel is het aantal elementen in de cykel. In de permutatie van hierboven is er één cykel van de lengte 3, één cykel van de lengte 2 en één cykel van de lengte 1.

Aan π een permutatie met $b_1(\pi)$ cycli van de lengte 1, $b_2(\pi)$ cycli van de lengte 2, ..., en $b_k(\pi)$ cycli van de lengte k , voegen we toe het multinoom

$b_1(\pi) b_2(\pi) \dots b_k(\pi)$. In het multinoom zijn x_1, x_2, \dots, x_k formele variabelen: het is een schrijfwijze die aangeeft de aantallen cyclen met hun lengten. Het wordt de cykelstructuur genoemd.

De cykelindex van een permutatiegroep G op D is de genormeerde som over de cykelstructuren, d.w.z. als $|D| = k$:

$$(12.4) \quad P_G(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} x_1^{b_1(\pi)} x_2^{b_2(\pi)} \dots x_k^{b_k(\pi)}.$$

Voorbeeld.

De cykelindex van de groep $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a & b & d & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{bmatrix} \right\}$ is:

$$\frac{1}{4}(x_1^4 + x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_2^2 + x_2^4) = \frac{1}{4}(x_1^4 + 2x_1^2 x_2^2 + x_2^4).$$

12.5. LEMMA

Zij π een permutatie met $b_i(\pi)$ cyclen van de lengte i ($1 \leq i \leq k$).

Laat $F(\pi)$ de verz. zijn van alle functies die voor iedere cykel aan de elementen uit zo'n cykel hetzelfde beeld geven, d.w.z. $f(d) = f(\pi(d))$, $d \in D$.

Dan geldt:

$$w(F(\pi)) = \prod_{i=1}^k \left[\sum_{r \in R} w(r) \right]^{b_i(\pi)}.$$

BEWIJS:

Veronderstel dat er m cyclen zijn met lengte D_1, D_2, \dots, D_m (verschillende cyclen mogen dezelfde lengte hebben). Laat $R = \{s_1, s_2, \dots, s_p\}$. We kunnen dan schrijven:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^k \left[\sum_{r \in R} w(r) \right]^{b_i(\pi)} &= \prod_{i=1}^m \left\{ \sum_{r \in R} w(r) \right\}^{D_i} = \prod_{i=1}^m \{w(s_1)^{D_i} + w(s_2)^{D_i} + \dots + w(s_p)^{D_i}\} \\ &= \{w(s_1) + w(s_2) + \dots + w(s_p)\}^{D_1} \cdot \{w(s_1) + w(s_2) + \dots + w(s_p)\}^{D_2} \cdot \dots \\ &\quad \cdot \{w(s_1) + w(s_2) + \dots + w(s_p)\}^{D_m} = \end{aligned}$$

(laat bij de uitwerking van dit product in de i -de term $w(r_i)$ worden gekozen: r_i is dus een van de s_j 's, d.w.z. r_i is een element uit R)

$$\sum_{r_1 \in R} \sum_{r_2 \in R} \dots \sum_{r_m \in R} w(r_1)^{D_1} w(r_2)^{D_2} \dots w(r_m)^{D_m} = \sum_{r_1 \in R} \sum_{r_2 \in R} \dots \sum_{r_m \in R} w(f),$$

met $f \in F$ zodanig dat $f(d) = r_i$ voor $i=1, 2, \dots, m$ en d uit de i -de cykel.

Hieruit volgt:

$$\prod_{i=1}^k \left[\sum_{r \in R} w(r) \right]^{b_i(\pi)} = \sum_{f \in F(\pi)} w(f) = w(F(\pi)). \quad \blacksquare$$

We hebben nu al het voorbereidende werk gedaan om de fundamentele stelling van Pólya te kunnen geven. We nemen aan dat $|D| = k$.

12.6 STELLING

De patronen-telreeks wordt gevonden door in de cykelindex van G te substitueren:

$$\sum_{r \in R} w(r) \text{ voor } x_1, \sum_{r \in R} w(r)^2 \text{ voor } x_2, \dots, \sum_{r \in R} w(r)^k \text{ voor } x_k,$$

in formule vorm, de patronen-telreeks is gelijk aan

$$(12.7) \quad P_G \left(\sum_{r \in R} w(r), \sum_{r \in R} (w(r))^2, \dots, \sum_{r \in R} (w(r))^k \right).$$

BEWIJS:

De verzameling van alle functies met een zeker gewicht w duiden we aan door $F(w)$. Zeg $m(w)$ is het aantal equivalentieklassen in $F(w)$, dan is de patronentelreeks gelijk aan $\sum_w m(w)w$.

Om het aantal equivalentie klassen in $F(w)$ te tellen gaan we gebruik maken van de stelling van Burnside.

f_1 en f_2 zijn equivalent d.e.s.d. als er een $\pi \in G$ is met $f_1(\pi^{-1}(d)) = f_2(d)$ voor alle $d \in D$.

Voor $\pi \in G$, zij $\pi^* \in G^*$ de permutatie op $F(w)$ die aan f de configuratie $\pi^*(f)$ toevoegt met $(\pi^*(f))(d) = f(\pi^{-1}(d))$. Ga zelf na dat G^* een groep is met $|G| = |G^*|$.

f_1 en f_2 zijn dus equivalent als er een $\pi^* \in G^*$ is zdd. $f_2 = \pi^*(f_1)$. Volgens de stelling van Burnside geldt voor het aantal equivalentieklassen in $F(w)$:

$$m(w) = \frac{1}{|G^*|} \sum_{\pi^* \in G^*} \psi_w(\pi^*) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \psi_w(\pi^*),$$

met $\psi_w(\pi^*)$ het aantal configuraties in $F(w)$ dat onder π^* invariant is. Hieruit volgt:

$$\text{Patronentelreeks} = \sum_w m(w)w = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \left\{ \sum_w \psi_w(\pi^*)w \right\}.$$

$f \in F(w)$ is invariant onder $\pi \leftrightarrow \pi^*(f) = f \leftrightarrow f(\pi^{-1}(d)) = f(d)$ voor alle $d \leftrightarrow f \in F(\pi)$.

Dit geeft m.b.v. lemma 12.5:

$$\begin{aligned} \text{Patronentelreeks} &= \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} w(F(\pi)) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \prod_{i=1}^k \left(\sum_{r \in R} w(r)^i \right)^{b_i(\pi)} \\ &= P_G \left[\sum_{r \in R} w(r), \sum_{r \in R} (w(r))^2, \dots, \sum_{r \in R} (w(r))^k \right]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Opmerking: Het bepalen van de configuratie-telreeks is een speciaal geval. De permutatiegroep bestaat dan uit één element nl. de identieke permutatie met cykelstructuur x_1^k , als $|D| = k$. De cykelindex is dus ook x_1^k en (12.7) geeft als telreeks $(\sum_{r \in R} w(r))^k$, het multinomium van stelling (10.7).

12.9 STELLING

Het totale aantal niet-equivalente functies (of patronen) vinden we door in de cykelindex te substitueren $|R|$ voor alle x_i , $i=1, \dots, k$.

In formule vorm: # patronen = $P_G(|R|, |R|, \dots, |R|)$.

BEWIJS:

Het totale aantal patronen vinden we door in de patronentelreeks voor alle gewichten 1 te substitueren. Als $w(r) = 1$ voor alle r , dan is $\sum_{r \in R} (w(r))^m$ gelijk aan $|R|$, etc. ■

12.10 Voorbeeld.

Wat is de patronen-telreeks voor de schaakborden van figuur (11.1)?

Laten we aan w gewicht x en aan z gewicht y toekennen. Volgens voorbeeld (12.1) moeten we de cykelindex berekenen van de permutatiegroep

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix} \right\}.$$

De cykelindex is:

$$\frac{1}{4}(x_1^4 + x_4 + x_2^2 + x_4) = \frac{1}{4}(x_1^4 + x_2^2 + 2x_4).$$

Volgens (12.6) wordt de patronen-telreeks:

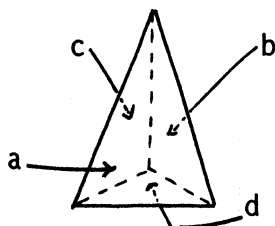
$$\frac{1}{4}((x+y)^4 + (x^2+y^2)^2 + 2(x^4+y^4)) = x^4 + x^3y + 2x^2y^2 + xy^3 + y^4.$$

Hieruit lezen we af dat er 1 patroon is met 4 witte velden, 1 patroon met 3 witte en 1 zwart veld, 2 patronen met 2 witte en 2 zwarte velden, 1 patroon met 1 wit en 3 zwarte velden, 1 patroon met 4 zwarte velden. In totaal zijn er 6 patronen.

12.11 Voorbeeld.

Bepaal het aantal manieren om de vier zijvlakken a, b, c en d van de pyramide in figuur (12.12) te kleuren met kleuren x en y .

(12.12)



We nemen voor D de verzameling $\{a,b,c,d\}$ van de vier zijvlakken van de pyramide. We nemen voor R de verzameling van de kleuren $\{x,y\}$. Aan kleur x voegen we gewicht $w(x) = x$ toe, aan kleur y het gewicht $w(y) = y$. De permutatiegroep is:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & a & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & b & d \end{pmatrix} \right\}.$$

De permutatie $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & a & d \end{pmatrix}$ correspondeert met een rotatie van 120° om de verticale as tegen de klokriching in. De permutatie $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & b & d \end{pmatrix}$ correspondeert met een zelfde type rotatie om 240° . De cykelindex van G is $\frac{1}{3}(x_1^4 + 2x_1x_3)$.

De patronen-telreeks is:

$$\frac{1}{3} \left[(x+y)^4 + 2(x+y)(x^3+y^3) \right] = x^4 + 2x^3y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + y^4.$$

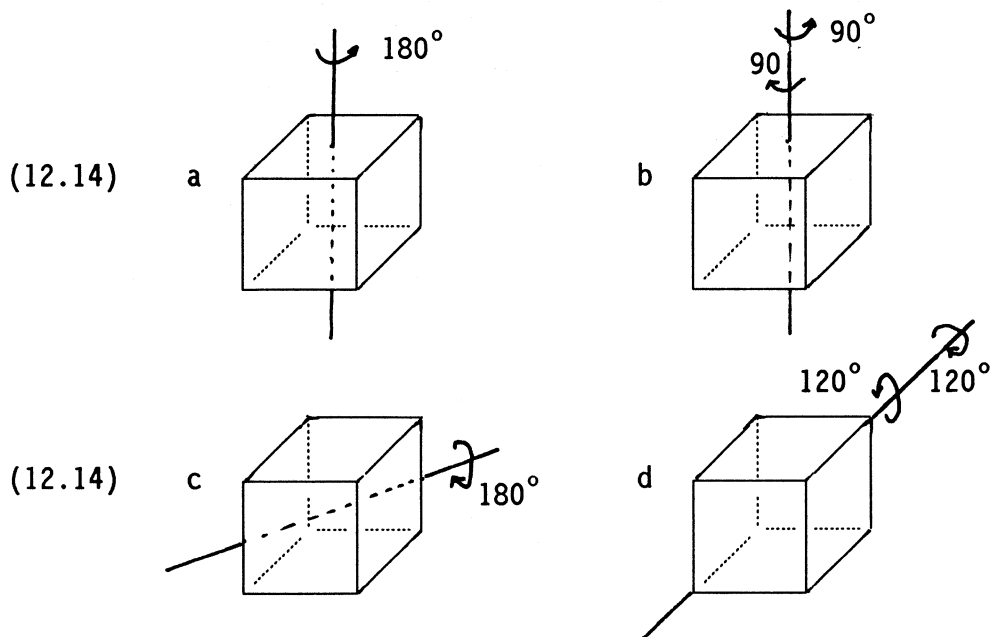
Er zijn dus 8 verschillende manieren.

12.13 Voorbeeld.

Wat is het aantal manieren om de 8 hoekpunten van een kubus te kleuren met 2 kleuren, zeg x en y ?

Zij G de permutatiegroep corresponderend met alle rotaties van de kubus. Er zijn 24 permutaties in G die in 5 klassen te verdelen zijn:

1. De identieke permutatie met cykel structuur x_1^8 .
2. Drie permutaties corresponderend met rotaties van 180° om assen die middelpunten van tegenoverliggende zijvlakken verbinden (figuur (12.14a)). Ieder van deze permutaties heeft cykelstructuur x_2^4 .
3. Zes permutaties corresponderend met rotaties van 90° om dezelfde assen als onder 2 (figuur (12.14b)). Ieder van deze permutaties heeft een cykelstructuur x_4^2 .
4. Zes permutaties corresponderend met rotaties van 180° om assen die de middens van tegenoverliggende ribben verbinden (figuur (12.14c)). De cykelstructuur van ieder der permutaties is x_2^4 .
5. Acht permutaties corresponderend met rotaties van 120° om assen die tegenoverliggende hoekpunten verbinden (figuur (12.14d)). Ieder van deze permutaties heeft cykelstructuur $x_1^2x_3^2$.



De cykelindex van de permutatiegroep is $\frac{1}{24} [x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2x_3^2]$.

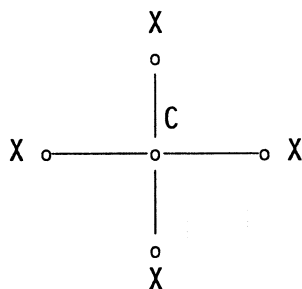
De patronentelreeks wordt: $\frac{1}{24} [(x+y)^8 + 9(x^2+y^2)^4 + 6(x^4+y^4)^2 + 8(x+y)^2(x^3+y^3)^2]$

Door te substitueren $x = y = 1$ vinden we het totale aantal patronen:

$$\frac{1}{24} [2^8 + 9 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2^2 \cdot 2^2] = 23.$$

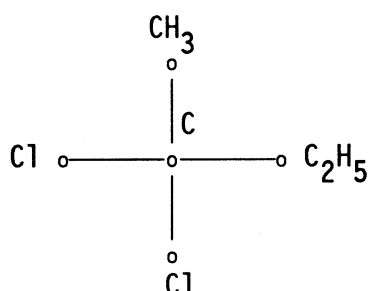
12.15 Voorbeeld.

We beschouwen de klasse van organische moleculen van de vorm:



met C een koolstof atoom en ieder van de X'en is een element uit de verzameling {CH₃ (methyl), C₂H₅ (ethyl); H (waterstof), Cl (chloor)}.

Een voorbeeld van een mogelijk molecuul is:



Ieder molecuul heeft als model een viervlak met het koolstofatoom in het centrum en X-componenten in de hoekpunten. Om het aantal verschillende moleculen te bepalen passen we weer de stelling van Pólya toe.

Als D nemen we de vier hoekpunten van het viervlak, als R de verzameling: $\{CH_3, C_2H_5, H, Cl\}$.

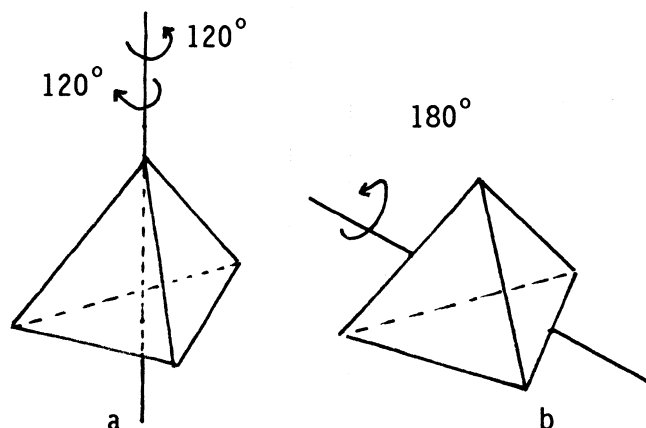
Als gewichten nemen we $w(CH_3) = x$, $w(C_2H_5) = y$, $w(H) = u$ en $w(Cl) = v$.

De permutatiegroep G correspondeert met alle rotaties van het tetrahedron.

We gaan de cykelindex bepalen:

1. De identieke permutatie met cykelstructuur x_1^4 .
2. Acht permutaties corresponderend met rotaties van 120° om assen van een hoekpunt naar het midden van het tegenoverliggende zijvlak (figuur (12.16a)). Iedere permutatie heeft cykelstructuur x_1x_3 .
3. Drie permutaties corresponderend met rotaties van 180° om assen die de middens van tegenoverliggende ribben verbinden (figuur (12.16b)). De cykelstructuur is x_2^2 .

(12.16)



De cykelindex is: $P_G(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{12} (x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2)$. De patronen-telreeks dus:

$$\frac{1}{12} \left[(x+y+u+v)^4 + 8(x+y+u+v)(x^3+y^3+u^3+v^3) + 3(x^2+y^2+u^2+v^2)^2 \right]$$

Het aantal moleculen vinden we door $x = y = u = v = 1$ te substitueren.

Dit aantal is ook $P_G(4,4,4) = \frac{1}{12} (4^4 + 8 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2) = 36$.

Zijn we speciaal geïnteresseerd in moleculen die een waterstofatoom bevatten dan kunnen we substitueren $x = y = v = 1$. De telreeks wordt dan

$$\frac{1}{12} \left[(3+u)^4 + 8(3+u)^3 + 3(3+u^2)^2 \right] = u^4 + 3u^3 + 6u^2 + 11u + 15.$$

Er is dus 1 molecuul met 4 H-atomen, 3 met 3 H-atomen, 6 met 2 H-atomen, 11 moleculen met 1 H-atoom en 15 moleculen die geen H-atoom bevatten.

Opgave 1

Zij $D = \{a,b,c,d\}$ en $R = \{w,z\}$. Neem x als het gewicht van w en y als het gewicht van z . Zij $G = \{\pi_1, \pi_2\}$ de permutatiegroep van D met

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \text{ en } \pi_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & c & b & d \end{pmatrix}.$$

- Bepaal de figuurtelreeks;
- Bepaal de configuratietelreeks;
- Bepaal de patronentelreeks;
- Bepaal het aantal niet-equivalente functies van D naar R .

Opgave 2

Beschouw een halssnoer met 4 kralen die rood en blauw kunnen zijn.

- Welke permutatiegroep is in het spel als twee halssnoeren equivalent heten als ze door draaien of omkeren in elkaar kunnen worden gezet?
- Wat is de cykelindex van deze groep?
- Bepaal het aantal verschillende halssnoeren.
- Bepaal het aantal verschillende halssnoeren met 2 rode en 2 blauwe kralen.

Opgave 3

Los opgave 1 uit paragraaf 11 op met de theorie van Pólya.

Opgave 4

Los opgave 2b uit paragraaf 11 op met de theorie van Pólya.

Opgave 5

Los opgave 3 uit paragraaf 11 op met de theorie van Pólya.

Opgave 6

Los opgave 4 uit paragraaf 11 op met de theorie van Pólya.

Opgave 7

Los opgave 5 uit paragraaf 11 voor n oneven op met de theorie van Pólya.

Opgave 8

Los opgave 6 uit paragraaf 11 op met de theorie van Pólya.

Opgave 9

Beschouw kleuringen van de hoekpunten van een regelmatige zeshoek met twee kleuren. Twee kleuringen zijn equivalent als ze door draaiing van de zeshoek in elkaar overgaan.

- Welke permutatiegroep is in het spel?
- Bepaal het aantal verschillende kleuringen.
- Bepaal het aantal verschillende kleuringen waarin beide kleuren driemaal voorkomen.

Opgave 10

Los opgave 8b uit paragraaf 11 op met de theorie van Pólya.

Opgave 11

Beschouw een regelmatige vijfhoek die vrij in de ruimte kan bewegen en waarvan de hoekpunten met rood, wit en blauw worden gekleurd.

- Hoeveel verschillende kleuringen zijn er met 2 rode, 1 witte en 2 blauwe hoekpunten ?
- Hoeveel verschillende kleuringen zijn er met 3 rode hoekpunten ?

Opgave 12

Los opgave 9 uit paragraaf 11 op met de theorie van Pólya.

Opgave 13

Beschouw een 2×4 schaakbord waarvan de velden met wit en zwart worden gekleurd. We noemen twee borden hetzelfde als ze door draaien over 180° in elkaar over gaan.

- Bepaal de patronentelreeks.
- Hoeveel borden zijn er met 6 zwarte en 2 witte velden ?

Opgave 14

Beschouw een kubus waarvan de zijvlakken rood en blauw gekleurd kunnen worden. Zij G de permutatiegroep van alle rotaties.

- Wat is de cykelindex van deze groep?
- Bepaal het aantal verschillende kleuringen.
- Bepaal het aantal verschillende kleuringen met 2 rode en 4 blauwe vlakken.

Opgave 15

De 6 zijvlakken van een kubus worden met 4 kleuren A, B, C en D gekleurd. Zij G de permutatiegroep van alle draaiingen. Op hoeveel verschillende manieren kan de kubus gekleurd worden z.d.d. 2 vlakken kleur A, 2 vlakken kleur B, 1 vlak kleur C en 1 vlak kleur D heeft?

Opgave 16

Beschouw kleuringen van de zijvlakken van een kubus met k kleuren ($k \leq 6$).

Zij G de permutatiegroep van alle rotaties van de kubus.

- Wat is de cykelindex van deze groep ?
- Bepaal de patronen-telreeks.
- Bereken het aantal verschillende kleuringen waarin alle 6 kleuren voorkomen.

Opgave 17

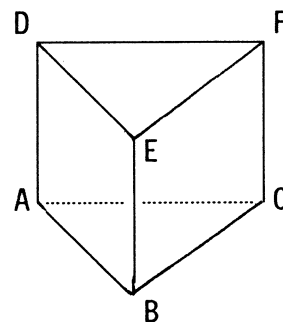
Beschouw kleuringen van de hoekpunten van een tetrahedron (regelmatig viervlak) met de kleuren rood, wit en blauw.

Twee kleuringen heten equivalent als ze door draaiing van het tetrahedron in elkaar overgaan.

- Wat is de patronen-telreeks?
- Bepaal het aantal verschillende kleuringen.
- Bepaal het aantal verschillende kleuringen met 1 rode, 2 witte en 1 blauwe kleur.

Opgave 18

Beschouw kleuringen van de hoekpunten van het hiernaast getekende rechte prisma ABCDEF (driehoek ABC is gelijkzijdig) met drie verschillende kleuren. Kleuringen zijn equivalent als ze door een draaiing in drie dimensies in elkaar kunnen overgaan.



- Bepaal de permutatiegroep G van de draaiingen.
- Bepaal de cykelindex van G en de patronentelreeks.
- Hoeveel verschillende kleuringen zijn er waarin iedere kleur precies twee keer voorkomt?

Opgave 19

Beschouw een regelmatige 8-hoek, waarvan de hoekpunten met 3 kleuren worden gekleurd.

Hoeveel verschillende kleuringen zijn er mogelijk als de 8-hoek in twee dimensies gedraaid mag worden?

Opgave 20

Laat G een cyclische permutatiegroep van een verz. S zijn: $G = \{\pi^i, 1 \leq i \leq n\}$.

a. Toon aan dat het aantal equivalentieklassen waarin S wordt verdeeld door de equivalentierelatie, geïnduceerd door G , gelijk is aan:

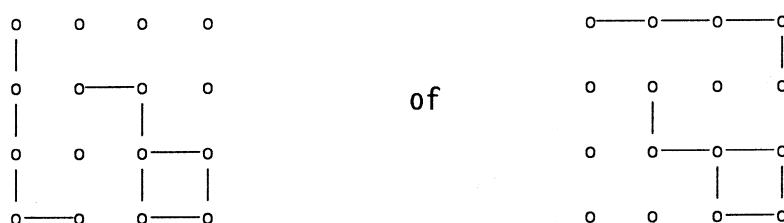
$$\frac{1}{n} \sum_{d|n} \psi(\pi^d) \phi\left(\frac{n}{d}\right), \text{ waarbij } \phi \text{ de Eulerfunctie is (zie opgave 9 paragraaf 9).}$$

b. Pas de formule uit a toe om opgave 19 op te lossen.

Opgave 21

Een producent van geïntegreerde schakelingen bouwt chips met 16 elementen die, zoals hiernaast is getekend, in een 4×4 matrix zijn gerangschikt. Teneinde verschillende circuits te maken heeft hij verschillende patronen nodig voor de verbinding der elementen. Neem aan dat slechts horizontale en verticale verbindingen mogelijk zijn tussen buurelementen.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16



Om verbindingen op een chip aan te brengen is een foto-masker nodig van het verbindingspatroon. Hetzelfde foto-masker is bruikbaar voor beide aangegeven patronen (spiegel om een diagonaal). Hoeveel maskers zijn nodig om alle mogelijke patronen te realiseren?

Opgave 22

De hoekpunten van een vierkant worden met 3 kleuren gekleurd. Twee kleuringen heten equivalent als ze in elkaar overgaan door het vierkant in twee dimensies te draaien en/of door de kleuren te permuteren.

Bepaal het aantal equivalentieclassen van de kleuringen.

Opgave 23

Laat D de verz. zijn van de 2^n binaire getallen bestaande uit n bits. Aan ieder element $i_1 i_2 \dots i_n$ van D voegen we een permutatie $\pi_{i_1 i_2 \dots i_n}$ op D toe gedefinieerd door:

$$\pi_{i_1 i_2 \dots i_n}(j_1, j_2, \dots, j_n) = k_1 k_2 \dots k_n \text{ met } k_m = \begin{cases} j_m & \text{als } i_m = 0 \\ 1 - j_m & \text{als } i_m = 1 \end{cases}$$

- Toon aan dat deze permutaties een groep vormen.
- Toon aan dat de cykelindex $\frac{1}{2^n} \{x_1^{2^n} + (2^n - 1)x_2^{2^{n-1}}\}$ is .
- Zij $R = \{0, 1\}$. Bepaal het aantal verschillende (m.b.t. de permutatiegroep) functies van D naar R .

13. Het tellen van niet-isomorfe grafen

In paragraaf 10 telden we grafen waarvan de knooppunten genummerd waren. Dat betekende dat isomorfe grafen als verschillende grafen geteld werden. In deze paragraaf zullen we alleen niet-isomorfe grafen als verschillend tellen.

Een normale graaf met n knooppunten kan gezien worden als een functie van $D = \{\text{alle tweetallen van verschillende knooppunten}\}$ naar $R = \{0,1\}$.

Aan een tweetal wordt het getal 0 resp. 1 toegevoegd als ze niet resp. wel door een tak verbonden zijn.

Bedenk dat de structuurmatrix in feite een speciale schrijfwijze voor deze functie is. Twee grafen zijn isomorf indien bijbehorende functies equivalent zijn onder een zekere permutatie van de elementen van D . Om de stelling van Pólya te kunnen toepassen moeten we de cykelindex van de permutatiegroep op D bepalen.

Indien de n knooppunten van een graaf G worden gepermuteerd, dan induceert dat een permutatie van de tweetallen knooppunten, de elementen van D .

Bijvoorbeeld, zij $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. De permutatie $\pi = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_4 & v_2 & v_1 & v_3 \end{pmatrix}$ van de elementen van V induceert de permutatie

$$\pi = \left[\begin{array}{l} (v_1 \& v_2)(v_1 \& v_3)(v_1 \& v_4)(v_2 \& v_3)(v_2 \& v_4)(v_3 \& v_4) \\ (v_4 \& v_2)(v_4 \& v_1)(v_4 \& v_3)(v_2 \& v_1)(v_2 \& v_3)(v_1 \& v_3) \end{array} \right].$$

Alle permutaties van $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ vormen de symmetrische groep S_n met $n!$ elementen.

De door deze permutaties geïnduceerde permutaties op de $\frac{1}{2}n(n-1)$ tweetallen in D vormen ook een groep met $n!$ elementen. Deze groep wordt de tweetallengroep R_n genoemd. In de literatuur is de cykelindex van de groep R_n voor willekeurige n te vinden. Het zou ons te ver voeren deze formules af te leiden. Indien n niet te groot is, dan kan de cykelindex door aftelling bepaald worden. Ga na (zie opgave 3) dat de cykelindex van R_4 gelijk is aan

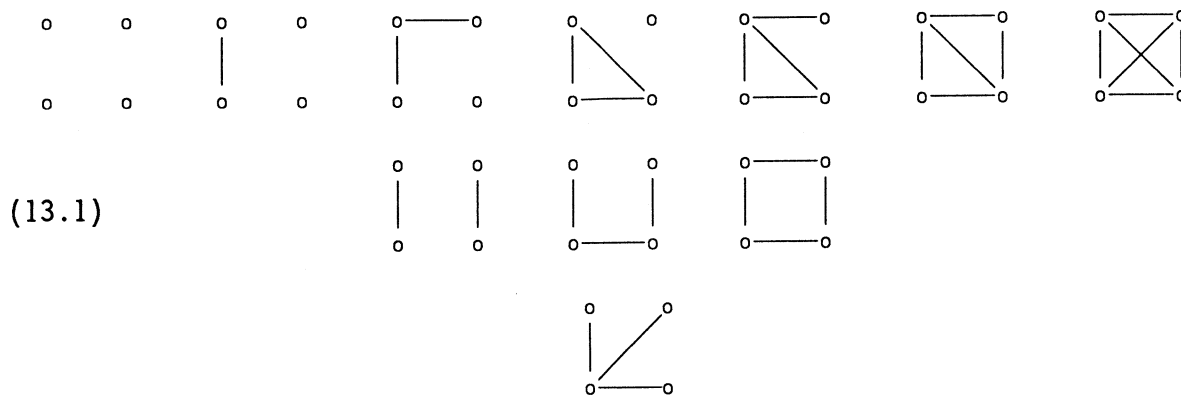
$$\frac{1}{24}(x_1^6 + 9x_1^2x_2^2 + 8x_3^2 + 6x_2x_4).$$

We voegen aan de elementen van R gewichten toe. Aan het element 0 voegen we toe het gewicht 1, aan het element 1 het gewicht x .

De figuur-telreeks wordt dan $(1+x)$. Volgens de stelling van Pólya wordt de patronen-telreeks:

$$\frac{1}{24} \left[(1+x)^6 + 9(1+x)^2(1+x^2)^2 + 8(1+x^3)^2 + 6(1+x^2)(1+x^4) \right] = 1+x+2x^2+3x^3+2x^4+x^5+x^6.$$

De coëfficiënten van x^m geeft het aantal niet-equivalente functies met gewicht x^m . In grafentaal is dit het aantal niet-isomorfe normale grafen met 4 knooppunten en m takken. In totaal zijn er dus 11 niet-isomorfe normale grafen met 4 knooppunten. Ze zijn getekend in figuur (13.1).



We kunnen ook niet-isomorfe grafen tellen die evenwijdige takken mogen bezitten. Als we maximaal k evenwijdige takken toestaan, dan wordt de figuurtelreeks $(1+x+\dots+x^k)$. M.b.v. de stelling van Pólya is de patronentelreeks te bepalen.

Indien we ook lussen toestaan, dan verandert de cykelindex. Immers D wordt nu een verzameling van $\frac{1}{2}n(n+1)$ elementen, ook de n tweetallen met gelijke knooppunten moeten we nu in D opnemen.

Opgave 1

Hoeveel verschillende grafen zijn er met 4 knooppunten als tussen ieder tweetal knooppunten hoogstens twee takken zijn toegestaan?

Opgave 2

Onderzoek de niet-isomorfe normale gerichte grafen met 3 knooppunten als volgt:

- Beschouw de symmetrische groep S_3 en bepaal de door S_3 geïnduceerde permutatiegroep van de geordende tweetallen uit $\{1,2,3\}$.
- Bepaal de cykelindex van deze groep.
- Hoeveel niet-isomorfe normale gerichte grafen met 3 knooppunten zijn er?
- Bepaal de patronentelreeks.
- Hoeveel niet-isomorfe normale gerichte grafen met 3 knooppunten en 4 pijlen zijn er? Teken deze grafen.

Opgave 3

Bewijs dat de cykelindex van de tweetallengroep R_4 gelijk is aan

$$\frac{1}{24} (x_1^6 + 9x_1^2x_2^2 + 8x_3^2 + 6x_2x_4).$$